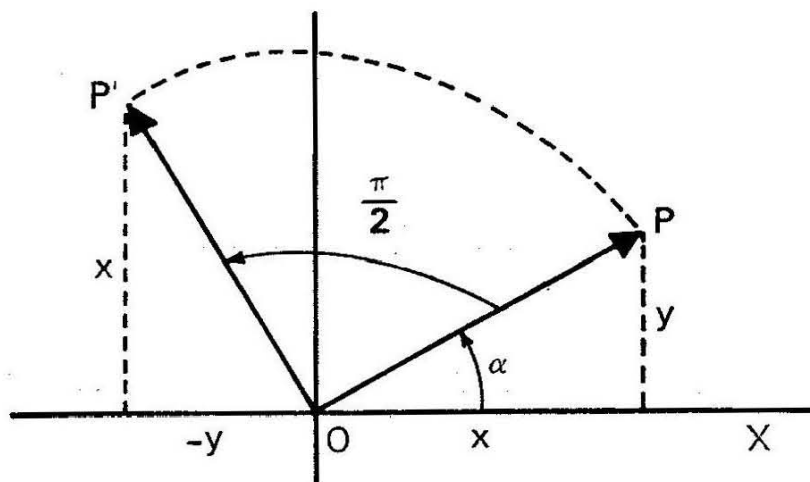


J. SEBASTIÃO E SILVA

3. Interpretação geométrica da multiplicação de números complexos. Começemos pelo seguinte caso particular:

Produto do número i por um número complexo qualquer,

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$



Basta considerar o caso em que $z \neq 0$. Temos:

$$iz = -y + ix$$

$$|iz| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Seja $r = |z|$, α o argumento principal de z e α' o argumento principal de iz . Virá, então:

$$\cos \alpha' = -\frac{y}{r} = -\sin \alpha, \quad \sin \alpha' = \frac{x}{r} = \cos \alpha,$$

donde

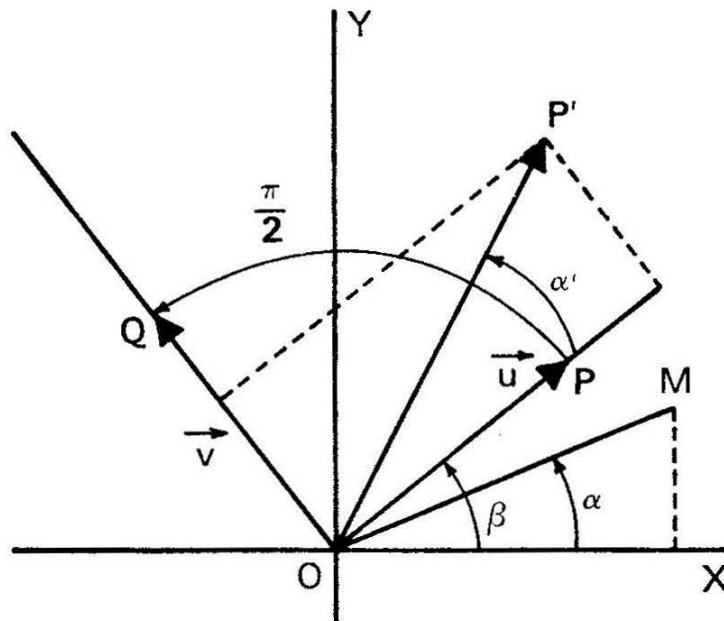
$$\alpha' \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Por conseguinte: a operação $z \rightarrow iz$ (multiplicação por i) traduz-se geometricamente pela rotação de 90° no sentido positivo. (No caso da figura o sentido positivo é, como habitualmente, o sentido anti-horário.)

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

Podemos, agora, passar ao caso geral:

Produto de um número complexo $z = x + iy$ por outro número complexo, $w = u + iv$ ($\forall x, y, u, v \in \mathbb{R}$).



Basta considerar o caso em que $z \neq 0$ e $w \neq 0$. Suponhamos que se tem, na forma trigonométrica:

$$(1) \quad z = r E(\alpha) \quad , \quad w = \rho E(\beta)$$

(α, β argumentos principais)

Sejam M, P, P', Q os pontos que representam z, w, zw, iw , respectivamente, e ponhamos

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$$

Então $\vec{v}$ resulta de $\vec{u}$ por uma rotação de 90° no sentido positivo. Ora

$$zw = (x + iy) w = xw + y(iw) \quad (\text{porquê?})$$

J. SEBASTIÃO E SILVA

Logo, segundo o estabelecido no n.º 1:

$$(2) \quad \overrightarrow{OP'} = x \vec{u} + y \vec{v}$$

Além disso

$$(3) \quad |\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}|$$

Consideremos agora o referencial cujo 1.º eixo é a recta OP orientada de O para P, cujo 2.º eixo é a recta OQ orientada de O para Q e cuja unidade de comprimento é igual à do primeiro referencial. Então de (2) e (3) resulta que a abcissa e a ordenada de P' no novo referencial são, respectivamente,

$$x' = x \rho, \quad y' = y \rho$$

donde $|\overrightarrow{OP'}| = \sqrt{(x \rho)^2 + (y \rho)^2} = \rho \sqrt{x^2 + y^2} = \rho r$

ou seja $|\overrightarrow{zw}| = r \rho$

Por outro lado, se for α' a medida principal do ângulo orientado $\widehat{POP'}$, tem-se

$$\cos \alpha' = \frac{x \rho}{r \rho} = \frac{x}{r} = \cos \alpha, \quad \sin \alpha' = \frac{y \rho}{r \rho} = \frac{y}{r} = \sin \alpha$$

donde

$$\alpha' = \alpha$$

Ora

$$(4) \quad \widehat{XOP'} = \widehat{XOP} + \widehat{POP'} \quad (\text{ângulos orientados})$$

Como o segundo referencial está orientado no mesmo sentido que o primeiro (sentido anti-horário na figura), deduz-se de (4) que *um dos argumentos de zw* — medida do ângulo orientado $\widehat{XOP'}$ — será o número

$$\beta + \alpha' = \alpha + \beta$$

COMPÊNDIO DE MATEMÁTICA

Assim, em conclusão:

$$(5) \quad zw = (r \rho) E (\alpha + \beta)$$

Comparando (1) e (5), chegamos à seguinte

REGRA. *O produto de dois números complexos tem por módulo o produto dos módulos dos factores e por argumento (entre outros) a soma dos argumentos dos factores.*

É claro que esta regra também é válida se um dos factores é 0 (argumento arbitrário).

Em particular, mantém-se a PROPRIEDADE DO MÓDULO DO PRODUTO:

$$|zw| = |z| \cdot |w|, \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

que já se verificava em $\mathbb{R}$, tal como a PROPRIEDADE DO MÓDULO DA SOMA (n.º 2).

Geometricamente, vimos que se passa do vector $\overrightarrow{OP}$, representativo de w , para o vector $\overrightarrow{OP'}$, representativo de zw , efectuando a rotação de amplitude α e em seguida a homotetia de razão r (ou vice-versa). Assim:

A aplicação $w \xrightarrow{\quad} zw$ (multiplicação pelo número complexo z) traduz-se por uma transformação de semelhança: produto da rotação de amplitude α (argumento de z) pela homotetia de razão r (módulo de z).

EXERCÍCIOS — I. Desenhe o triângulo cujos vértices são as imagens dos números

$$1, \quad 2 + 2i, \quad \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e, em seguida, o triângulo cujos vértices correspondem aos produtos destes números por $-\sqrt{2}(1 + i)$ (dados a azul e resultados a vermelho).

J. SEBASTIÃO E SILVA

II. Mostre que os números complexos z tais que $|z| = 1$ formam um grupo multiplicativo isomorfo ao grupo multiplicativo das rotações do plano e ao grupo aditivo das classes de congruência de números reais para o módulo 2π .

III. Mostre que os conjuntos $\{1, i, -1, -i\}$ e

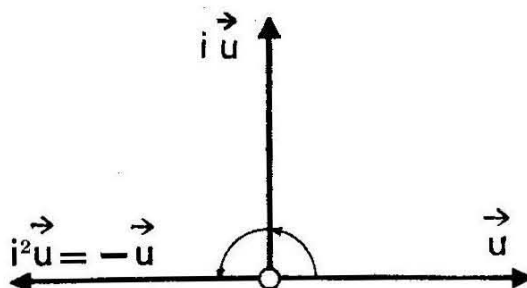
$$\left\{ 1, \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

são subgrupos multiplicativos do grupo anterior.

(Sugestão: nestes três exercícios convém usar a forma trigonométrica.)

NOTA IMPORTANTE. Os factos anteriores mostram que os números complexos podem ser interpretados como *operadores sobre vectores do plano*. Nesta ordem de ideias, o símbolo $E(\alpha)$ representa o operador *rotação de amplitude α* . Em particular, o número i é a rotação de 90° (no sentido positivo) e portanto o número $i^2 = i \cdot i$ é a rotação de 180° :

$$i^2 \vec{u} = i(i \vec{u}) = -\vec{u} = (-1) \vec{u}$$



Assim obtemos uma interpretação intuitiva da fórmula:

$$i^2 = -1$$