

só merecem confiança em regiões limitadas do espaço e do tempo; não podem ser extrapoladas muito para além do domínio das experiências efectuadas.

Portanto, só quando a evolução for lenta será lícito falar de probabilidades.

Recordemos, ainda, o exemplo dos desastres de avião: é hoje menor do que há vinte anos a frequência relativa dos desastres de aviação em percursos iguais. Neste caso, embora seja mais rápida a evolução, ainda, de certo modo, é lícito falar de probabilidade no sentido atrás considerado⁽¹⁾.

Casos há, porém, em que o emprego desta palavra escapa, de todo, a critérios quantitativos, que lhe confirmam interesse científico.

4. Axiomatização do conceito de probabilidade

Viu-se no número anterior que, para fundar uma teoria matemática das probabilidades, se idealiza para cada acontecimento, em certos tipos de experiências, um valor exacto da sua probabilidade. Contudo, seja esse valor uma convenção ou uma realidade, o que interessa para o desenvolvimento lógico da teoria não é, propriamente, o conceito em si, mas, antes, o conjunto das suas propriedades formais que intervêm nos cálculos e nos raciocínios. O que há a fazer, então, é escolher, entre essas propriedades, algumas mais simples, das quais se possam deduzir logicamente todas as outras. As propriedades escolhidas dir-se-ão *propriedades fundamentais* ou *axiomas* e o seu conjunto terá o nome de *axiomática*. Já em Matemáticas Gerais foi estudada uma axiomática dos grupos contínuos de grandezas. Trata-se, agora, de estabelecer uma axiomática do conceito de probabilidade, no caso dos corpos finitos de acontecimentos, considerando aquele conceito como *primitivo*, isto é, não definível logicamente à custa de outros.

Seja, pois, $\mathcal{R}$ um corpo finito de eventualidades a considerar numa dada prova $\mathcal{P}$, e suponhamos que a cada eventualidade $\alpha \in \mathcal{R}$, corresponde uma determinada probabilidade, que designaremos pelo

(1) – Nos seguros relativos a acidentes de aviação, as companhias americanas fazem hoje o cálculo dos prémios como se houvesse morte de um passageiro em 20.000 viagens de ida e volta.

símbolo $\text{Pr}(\alpha)$. Tomaremos como fundamentais as propriedades seguintes⁽¹⁾:

AXIOMA 1. *A probabilidade de α é sempre um número real não negativo, isto é:*

$$\text{Pr}(\alpha) \geq 0, \text{ qualquer que seja } \alpha \in \mathcal{R}.$$

AXIOMA 2. *Se α e β são acontecimentos incompatíveis de $\mathcal{R}$, tem-se:*

$$\text{Pr}(\alpha + \beta) = \text{Pr}(\alpha) + \text{Pr}(\beta).$$

(Convém aqui rever, cuidadosamente, as noções do n.º 2 e do n.º 3 relativas às álgebras de atributos e de acontecimentos).

AXIOMA 3. *A probabilidade do acontecimento certo é 1; isto é, tem-se:*

$$\text{Pr}(\alpha) = 1, \text{ se } \alpha \text{ é certo.}$$

Estas propriedades concordam com o conceito empírico de probabilidade, tal como foi atrás introduzido. Sendo as probabilidades, por assim dizer, limites de frequências relativas, é natural que se conservem as propriedades das frequências relativas que não mudam na passagem ao limite.

Os axiomas 1 e 2 dizem-nos, simplesmente, que a função $\text{Pr}(\alpha)$ é uma distribuição definida no corpo $\mathcal{R}$. O axioma 3 acrescenta que essa distribuição é relativa. Diremos, então, que se trata duma *distribuição de probabilidade* definida em $\mathcal{R}$. Mas só nas aplicações concretas será possível distinguir uma distribuição de probabilidade duma distribuição de frequência, pois que a anterior axiomática se limita a dar os caracteres duma distribuição abstracta.

(1) – Vários autores consideram, ainda, como axioma a propriedade relativa à probabilidade do produto. Mas essa propriedade pode considerar-se como definição ou como consequência de definição de probabilidade condicional, como veremos.

Da anterior axiomática deduzem-se, desde logo, as seguintes consequências (que se estendem a qualquer distribuição):

TEOREMA 1. *Se α implica β , então $\Pr(\alpha) \leq \Pr(\beta)$.*

Com efeito, se $\alpha \subset \beta$, tem-se $\beta = \alpha + \tilde{\alpha}\beta$ e, como α e $\tilde{\alpha}\beta$ são incompatíveis, vem, pelo axioma 2,

$$\Pr(\beta) = \Pr(\alpha) + \Pr(\tilde{\alpha}\beta)$$

donde se conclui, pelo axioma 1, que $\Pr(\beta) \geq \Pr(\alpha)$.

COROLÁRIO. *Qualquer que seja $\alpha \in \mathcal{R}$, tem-se:*

$$\Pr(\alpha) \leq 1.$$

Com efeito, todo o acontecimento α de $\mathcal{R}$ implica o acontecimento certo: isto é, em fórmula:

$$\alpha \subset I,$$

donde, pelo teorema 1 e pelo axioma 3:

$$\Pr(\alpha) \leq 1.$$

TEOREMA 2⁽¹⁾. *Se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são acontecimentos (de $\mathcal{R}$) incompatíveis dois a dois, a probabilidade de que se realize um dos acontecimentos $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ é a soma das probabilidades destes acontecimentos, isto é, tem-se:*

$$\Pr(\sum \alpha_i) = \sum \Pr(\alpha_i), \text{ se } \alpha_i \alpha_k = \emptyset \text{ para } i \neq k.$$

Basta aplicar, repetidamente, o axioma 2, observando que é $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4$, etc.,

(1) – Também conhecido por *princípio das probabilidades totais*.

e que, se $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ são incompatíveis dois a dois, também α_3 é incompatível com $\alpha_1 + \alpha_2$, α_4 com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, etc.

TEOREMA 3. *Quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathcal{R}$, tem-se*

$$\Pr(\alpha + \beta) = \Pr(\alpha) + \Pr(\beta) - \Pr(\alpha\beta).$$

Basta notar que $\alpha + \beta = \alpha\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\beta + \alpha\beta$ e aplicar o teorema 2, notando que $\Pr(\alpha) = \Pr(\alpha\tilde{\beta}) + \Pr(\alpha\beta)$, $\Pr(\beta) = \Pr(\tilde{\alpha}\beta) + \Pr(\alpha\beta)$. O teorema pode generalizar-se ao caso de vários acontecimentos, obtendo-se a fórmula de DANIEL DA SILVA (cf. A-10).

TEOREMA 4. *A probabilidade do acontecimento contrário de α é a diferença para 1 da probabilidade de α ; isto é:*

$$\Pr(\tilde{\alpha}) = 1 - \Pr(\alpha).$$

Consequência imediata dos axiomas 2, 3 e da definição de contrário ($\alpha + \tilde{\alpha} = I$, $\alpha\tilde{\alpha} = \emptyset$), conforme já se viu para as distribuições em geral.

COROLÁRIO. *Se α é acontecimento impossível, tem-se*

$$\Pr(\alpha) = 0.$$

Basta lembrar que o acontecimento impossível é contrário do acontecimento certo e aplicar o teorema 4 com o axioma 3.

É claro que, em virtude do teorema 2, uma distribuição de probabilidade num corpo finito $\mathcal{R}$ fica determinada, logo que se conheçam as probabilidades das células de $\mathcal{R}$: a probabilidade dum acontecimento $\alpha \in \mathcal{R}$ será a soma das probabilidades dos acontecimentos celulares de que α é a soma. Tudo está, pois, em determinar as probabilidades das células.

5. Alguns exemplos de cálculo de probabilidades *a priori*

Por vezes, a distribuição de probabilidade num corpo finito pode ser determinada *a priori* (isto é, antes de qualquer experiência deliberada) por simples considerações ditadas pelo *senso-comum*.