Por outro lado, se *a* é um número real, tem-se:

$$az = (ax) + i(ay), \text{ isto é:}$$

$$z \rightarrowtail (x, y) \Rightarrow az \rightarrowtail (ax, ay)$$

donde:

II. *O vector correspondente ao produto dum número real a por um número complexo z é o produto de a pelo vector correspondente a z.*

A conjunção deste facto com o anterior exprime-se dizendo:

O conjunto $\mathbb{C}$ *dos números complexos é um espaço vectorial sobre* $\mathbb{R}$, *isomorfo ao espaço vectorial constituído pelos vectores do plano.*

Mas note-se que $\mathbb{C}$ é um corpo, onde é portanto definido o produto de dois elementos *quaisquer* de $\mathbb{C}$, como sendo ainda um elemento de $\mathbb{C}$ (operação interna), o que já não sucede com os vectores do plano no sentido usual.

SOLUÇÕES DOS EXERCÍCIOS DO NÚMERO ANTERIOR:

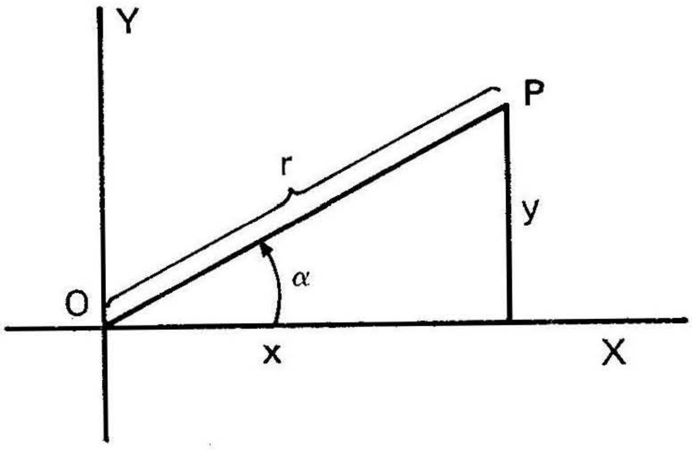
I. a) $(-5, 13)$, $(0, 1/2)$, $(5, -25/2)$;
b) $5(x+1) + 2(y-3) = 0$.

II. $AC//BD$. III. a) $D \notin ABC$; b) $2x+y+7z=0$.

2. **Representação trigonométrica dos números complexos.** Consideremos de novo o número complexo

$$z = x + iy$$

representado pelo ponto P do plano cartesiano.



Chama-se *módulo do número* z, e representa-se *por* $|z|$, o módulo do vector $\overrightarrow{OP}$ correspondente, ou seja a distância do ponto P, representativo de z, ao ponto O, origem dos eixos ([1]). Na figura, o módulo de z é designado por r. Será, pois

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Imediatamente se reconhece que

$$|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow x = 0 \wedge y = 0$$

O que se disse atrás sobre o *módulo da soma de dois vectores permite também reconhecer que*

$$\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'| \quad , \quad \forall z, z' \in \mathbb{C}}$$

Por outro lado, supondo $z \neq 0$, chama-se *argumento de* z a qualquer medida α, em radianos, do ângulo $X\hat{O}P$, cujo primeiro lado é o semi-eixo positivo $\dot{O}X$ e cujo segundo lado é a semi-recta $\dot{O}P$. Desde logo se vê que:

([1]) Como já sabemos, em geometria analítica identificam-se os comprimentos (ou distâncias) com os números reais que são as suas medidas.

Um número complexo $z \neq 0$ *tem uma infinidade de argumentos, que diferem todos entre si por múltiplos inteiros de* 2π. Chama-se *argumento principal* de z o argumento α de z tal que

$$0 \leqslant \alpha < 2\pi$$

(Se $z = 0$, diz-se que z tem *argumento arbitrário*).

Posto isto, deduz-se imediatamente da figura anterior que

$$r = r \cos \alpha \quad , \quad b = r \operatorname{sen} \alpha$$

e, como $z = x + iy$, tem-se

$$(1) \qquad \boxed{z = r\,(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)}$$

A expressão $r(\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha)$ é chamada *forma trigonométrica* do número complexo z, enquanto a expressão $x + iy$ é chamada *forma algébrica de* z.

Para comodidade de escrita, usaremos daqui por diante o símbolo $E(\alpha)$ como abreviatura da expressão $\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$. Assim, a fórmula (1) passa a escrever-se

$$\boxed{z = r\,E(\alpha)}$$

Em particular, se $|z| = 1$ (isto é, se $r = 1$), tem-se $z = E(\alpha)$. Deste modo, a expressão geral dos números complexos de módulo 1 será

$$E(\alpha) \equiv \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha$$

Recordemos o *critério de igualdade de dois números complexos na forma algébrica:*

$$x + iy = x' + iy' \Longleftrightarrow x = x' \wedge y = y' \quad (x,\ y,\ x',\ y' \in \mathbb{R})$$

Consideremos, agora, dois números complexos *não nulos* na forma trigonométrica

$$z = r\ E(\alpha) \quad , \quad z' = r'\ E(\alpha')$$

É óbvio que

(2) $$z = z' \Rightarrow r = r'$$

Mas, como vimos há pouco, um número complexo tem uma infinidade de argumentos e não podemos afirmar: $z = z' \Rightarrow \alpha = \alpha'$, mas apenas:

(3) $$z = z' \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z} : \alpha - \alpha' = 2n\pi \qquad (\text{se } z \neq 0)$$

Exprime-se esta última condição dizendo que α é *congruente com* α' *módulo* 2π e escrevendo

$$\alpha \equiv \alpha' \pmod{2\pi}$$

Reciprocamente, é óbvio que a conjunção de (2) com (3) implica $z = z'$. Assim, o *critério de igualdade de dois números complexos não nulos na forma trigonométrica* será:

$$r\ E(\alpha) = r'\ E(\alpha') \Leftrightarrow r = r' \wedge \alpha \equiv \alpha' \pmod{2\pi}$$

Em linguagem comum:

Dois números complexos não nulos são iguais, se e só se têm módulos iguais e os seus argumentos diferem por um múltiplo inteiro de 2π.

EXERCÍCIOS:

I. Represente graficamente os seguintes números complexos

$$1, \quad -1, \quad i, \quad -i, \quad 5, \quad -3, \quad 2i, \quad -\frac{2}{3}\,i,$$

$$1+i, \quad -i, \quad -1+i, \quad 1-i, \quad \sqrt{2}-i\sqrt{2}$$

e ache as respectivas formas trigonométricas.

II. Represente sob forma algébrica os seguintes números complexos:

$$\cos\frac{\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{3} \quad , \quad 2\,E\left(\frac{2}{3}\pi\right) \quad , \quad 4\,E\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sqrt{2}\,E\left(\frac{\pi}{4}\right) \quad , \quad E\left(\frac{3}{4}\pi\right) \quad , \quad E\left(\frac{5}{4}\pi\right)$$

NOTA. Também se pode chamar argumento dum número complexo ao próprio ângulo cuja medida é dada em radianos e que pode exprimir-se noutras unidades. Por exemplo, o primeiro número do exemplo anterior poderá também escrever-se:

$$\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ,$$

mas é claro que, neste caso, se trata de *funções trigonométricas de ângulo (ou arco)* e não de funções trigonométricas de números reais.