

Conteúdo

Páginas

Raízes de números complexos	1
Derivadas das funções trigonométricas	3
Axiomática da Probabilidade (Axiomática de Kolmogorov)	6

Referências

Fontes e Editores da Página	9
Fontes, Licenças e Editores da Imagem	10

Licenças das páginas

Licença	11
---------	----

Raízes de números complexos

Referência : Nuno Tavares, J., Geraldo, A. (2013), WikiCiências, 4(05):0773

Autor: João Nuno Tavares e Ângela Geraldo

Editor: José Francisco Rodrigues

Definição

As raízes de índice $(n \in \mathbb{N})$ de um número complexo (w) são os números complexos (z) tais que $(z^n = w)$.

Portanto, calcular $(\sqrt[n]{w})$ é equivalente a calcular os números complexos cuja potência de índice (n) seja igual a (w) .

Raízes de índice (n)

Determinar as raízes de índice $(n \in \mathbb{N})$ de um número complexo (w) , ou seja calcular $(\sqrt[n]{w})$ é então equivalente a determinar os números complexos (z) tais que:

$$(z^n = w)$$

Para isso consideramos os números complexos (z) e (w) na forma polar:

$$(w = |w| \cdot \text{cis}(\alpha))$$

$$(z = |z| \cdot \text{cis}(\theta))$$

Usando a fórmula de De Moivre temos então que

$$(z^n = w \Leftrightarrow (|z| \cdot \text{cis}(\theta))^n = |w| \cdot \text{cis}(\alpha) \Leftrightarrow |z|^n \cdot \text{cis}(n\theta) = |w| \cdot \text{cis}(\alpha))$$

Resolvendo a equação temos, atendendo à igualdade dos números complexos escritos na forma polar, que

$$(|z|^n = |w| \Rightarrow |z| = \sqrt[n]{|w|} = |w|^{1/n})$$

e

$$(n\theta = \alpha + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}, \quad k=0,1,2,\dots,n-1)$$

Portanto, as (n) raízes distintas de índice (n) de um número complexo $(w = a + bi = |w| \cdot \text{cis}(\alpha))$ são dadas por:

$$(z_k = |w|^{1/n} \cdot \text{cis}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,2,\dots,n-1) \quad (1),$$

logo têm o mesmo módulo pelo que pertencem à circunferência de centro na origem no referencial e raio $(|z| = |w|^{1/n})$. Note-se ainda que a diferença entre os argumentos de duas raízes (z_k) e (z_{k+1}) , $(\frac{2\pi}{n})$, é $(\frac{2\pi}{n})$, logo, as (n) raízes situam-se nos vértices de um polígono regular de (n) lados inscritos na referida circunferência.

<ggb_applet height="400" width="650" showResetIcon="true" filename="Raizescomplexas_a.ggb" />

Aplicação 1

Extração de raízes de índice (n) do número complexo (w) .

Escolha o número complexo (w) movendo o ponto a azul, escolha (n) o índice da raiz no seletor lateral, em seguida clique no botão *play* para iniciar a animação.

Use a caixa de verificação para exibir ou não o polígono de raízes.

Exemplos

Raízes cúbicas de -1

Considerando $(w = -1)$ queremos então determinar $(\sqrt[3]{-1})$, ou seja, encontrar os números complexos $(z = |z| \cdot \text{cis}(\theta))$ tal que $(z^3 = w)$, isto é, $(z^3 = -1)$.

Para isso temos de escrever $(w = -1)$ na forma polar:

$$(-1 = |w| \cdot \text{cis}(\alpha) \Rightarrow -1 = |w| \cos \alpha + i |w| \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |w| \cos \alpha = -1 \\ |w| \sin \alpha = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = 1 \\ \alpha = \pi \end{cases}$$

Portanto, $(w = \text{cis}(\pi))$.

Aplicando a fórmula (1) obtemos três raízes

cujo módulo é $(|z| = \sqrt[3]{1} = 1)$ e argumento $(\theta_k = \frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k=0,1,2)$, isto é,

$$|z| = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{3}, \quad \theta = \pi, \quad \theta = \frac{5\pi}{3}$$

As raízes cúbicas de (-1) são então:

$$\begin{aligned} (z_0) &= \text{cis}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \\ (z_1) &= \text{cis}(\pi) = -1, \\ (z_2) &= \text{cis}\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

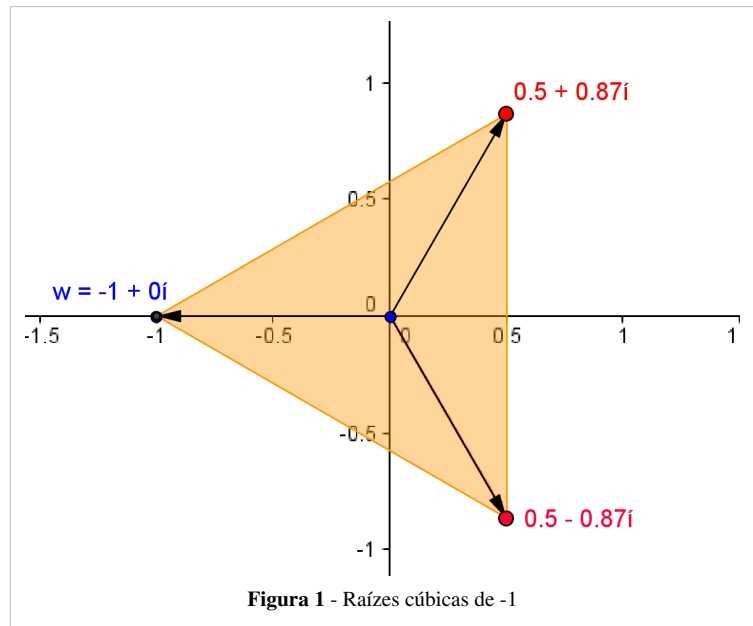


Figura 1 - Raízes cúbicas de -1

Raízes de índice 4 de $(w = \sqrt{3} + i)$

Considerando $(w = \sqrt{3} + i)$ pretendemos determinar $(\sqrt[4]{\sqrt{3} + i})$, ou seja, encontrar os números complexos $(z = |z| \cdot \text{cis}(\theta))$ tais que $(z^4 = w)$.

Mais uma vez precisamos de escrever (w) na sua forma polar:

$$(\sqrt{3} + i = |w| \cdot \text{cis}(\alpha) \Rightarrow \sqrt{3} = |w| \cos \alpha, \quad 1 = |w| \sin \alpha \Rightarrow$$

$$\begin{cases} |w| \cos \alpha = \sqrt{3} \\ |w| \sin \alpha = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |w| = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{6} \end{cases}$$

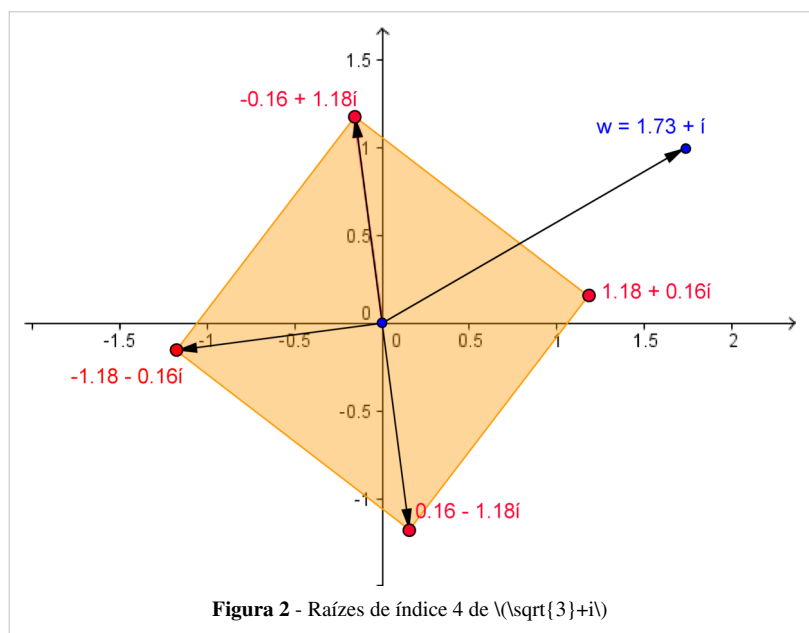


Figura 2 - Raízes de índice 4 de $(\sqrt{3} + i)$

$$(|w| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = \sqrt{4} = 2) \text{ e } (\sqrt{3} + i = 2 \operatorname{cis} \alpha = 2 \cos \alpha + 2i \sin \alpha)$$

Então,

$2\cos\alpha = \sqrt{3} \quad \Longleftrightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$	donde $\alpha = \frac{\pi}{6}$
$2\sin\alpha = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{1}{2}$	

Portanto, $w=2, \text{cis}\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Aplicando a fórmula (1) temos então que as raízes têm módulo $|z| = \sqrt[4]{2}$ e argumento $\theta_k = \frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{4}$, $k=0,1,2,3$, isto é, $|z| = \sqrt[4]{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$, $\theta = \frac{5\pi}{6}$, $\theta = \frac{3\pi}{2}$, $\theta = \frac{7\pi}{6}$.

As raízes de índice 4 de $\sqrt[4]{3}+i$ são, então:

$$\begin{aligned} & \sqrt[4]{2} \, e^{i\frac{\pi}{24}} \, \text{cis} \, \left(\frac{\pi}{24} \right) \text{cong } 1, 18 + 0, 16i \, ; \quad \text{quad } \sqrt[4]{2} \, e^{i\frac{13\pi}{24}} \, \text{cis} \, \left(\frac{13\pi}{24} \right) \text{cong } -0, 16 + 1, 18i \, ; \quad \text{quad } \sqrt[4]{2} \, e^{i\frac{25\pi}{24}} \, \text{cis} \, \left(\frac{25\pi}{24} \right) \text{cong } -1, 18 - 0, 16i \, ; \quad \text{quad } \sqrt[4]{2} \, e^{i\frac{37\pi}{24}} \, \text{cis} \, \left(\frac{37\pi}{24} \right) \text{cong } 0, 16 - 1, 18i \end{aligned}$$

Criada em 12 de Novembro de 2012

Revista em 06 de Maio de 2013

Aceite pelo editor em 06 de Maio de 2013

Derivadas das funções trigonométricas

Referência : Nuno Tavares, J., Geraldo, A. (2013), WikiCiências, 4(05):0774

Autor: João Nuno Tavares e Ângela Geraldo

Editor: *José Francisco Rodrigues*

Conceito de derivada

Recordemos que, dada uma função real de variável real $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, definida num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$, define-se a derivada de f num ponto $x \in I$, através do limite (se existir)

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Nesta fórmula $(h \neq 0)$ deve ser suficientemente pequeno para que $(x+h \in \mathbb{I})$.

Derivada da função $\sin$

Quando a variável x é expressa em radianos

Vamos usar a fórmula $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, válida quer x e $\cos x$ sejam expressos em graus ou radianos.

<pre><ggb_applet height="200" width="450" showResetIcon="true" filename="Derivadaseno.ggb" /></pre>	Suponhamos que x e h são ambos expressos em radianos. Vem, então, usando os Limites notáveis que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x + \frac{h}{2}\right)}{1} = \cos x$ Concluindo, $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos x$
---	---

Mas atenção que esta fórmula é válida apenas quando x e h são ambos expressos em radianos. Só assim é que conseguimos garantir que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x$.

Quando a variável x é expressa em graus

Vamos usar de novo a fórmula $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$, válida quer x e $\cos x$ sejam expressos em graus ou radianos.

Suponhamos que x e h são ambos expressos em graus. Vem, então, que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h^\circ) - \sin x^\circ}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos\left(x^\circ + \frac{h^\circ}{2}\right)}{1} = \cos x^\circ$$

Concluindo,

$$\frac{d}{dx} \sin(x^\circ) = \cos x^\circ$$

já que, como vimos nos Limites notáveis, quando h é expresso em graus $\frac{\sin(x+h^\circ) - \sin x^\circ}{h} = \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h^\circ} \cdot \frac{h^\circ}{h} = \cos x^\circ$.

Note que este resultado é bem mais complicado do que o anterior, devido ao aparecimento do factor extra $\frac{\pi}{180}$. Por isso há toda a conveniência em exprimir x em radianos, para que a derivada tenha uma expressão mais simples: $\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos x$.

Derivada da função $\cos$

Consideremos a variável x expressa em radianos.

Podemos fazer uma dedução direta, usando a definição de derivada, e cálculos em tudo análogos aos que foram feitos para calcular a derivada de $\sin$, quando x e h são ambos expressos em radianos. O resultado é

$$\cos'(x) = -\sin x$$

No entanto, é mais simples usar relações trigonométricas e a regra de derivação de função composta (regra da cadeia). Usamos, por exemplo, a relação trigonométrica $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Vem então que

$$\cos'(x) = \sin'\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

Derivada da função $\tan$

Usamos a regra de derivação de um quociente $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$, desde que as derivadas existam e o quociente faça sentido (aqui usamos óbvias simplificações de notação). Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, vem, com $x \neq \left(2k + 1\right)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, que

$$\begin{aligned} \tan' x &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x) \end{aligned}$$

<ggb_applet height="300" width="500" showResetIcon="true" filename="Derivadatan_a.ggb" />

Ver

-
- Derivadas das funções circulares por J. Sebastião e Silva ^[1]
 - J. Sebastião e Silva, Compêndio de Matemática, 2º Volume ^[2]
-

Criada em 02 de Janeiro de 2013

Revista em 15 de Maio de 2013

Aceite pelo editor em 15 de Maio de 2013

Referências

- [1] http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/images/4/4b/P%C3%A1ginas_de_Comp%C3%AAndio_de_Matem%C3%A1tica%2C_2%C2%BA_volume%2C_Cap%C3%ADtulo_I_-_Derivadas.pdf
- [2] http://www.fc.ul.pt/sites/default/files/fcul/dep/dm/obras_selecionadas/sebastiao_e_silva/compndios_de_matematica/Comp%EAndio%20da%20Matem%E1tica%2C%202%C2%BA%20Volume.pdf
-

Axiomática da Probabilidade (Axiomática de Kolmogorov)

Referência : Graça Martins, E. (2013), WikiCiências, 4(05):0775

Autor: Maria Eugénia Graça Martins

Editor: José Francisco Rodrigues

Considere-se um espaço de resultados (S) , finito, e um conjunto A de subconjuntos de (S) – acontecimentos – que satisfaça as seguintes condições:

- a) O acontecimento certo (S) , pertence a A .
- b) Se um acontecimento (A) pertence a A , então o seu complementar (ver Operações com acontecimentos) $(\bar{A})$ também pertence a A .
- c) Se dois acontecimentos pertencem a A , então a sua união $(A \cup B)$ (ver Operações com acontecimentos) também pertence a A .

Ao par (S, A) , chamamos *espaço de acontecimentos*.

Uma *medida de Probabilidade* (P) é uma função de conjunto, isto é, definida em A , que a cada elemento (A) pertencente a A associa um número real que se chama **Probabilidade** de (A) e se representa por $(P(A))$, satisfazendo as seguintes condições ou *axiomas*:

1º axioma - A probabilidade de qualquer acontecimento é maior ou igual a zero

$$(P(A) \geq 0).$$

2º axioma - A probabilidade do acontecimento certo (S) , é 1:

$$(P(S) = 1).$$

3º axioma - Dados dois acontecimentos disjuntos, a probabilidade da sua união é igual à soma das probabilidades de cada um

$$\text{Se } (A \cap B) = \emptyset \Rightarrow (P(A \cup B) = P(A) + P(B)).$$

No caso de S não ser finito, a condição c) é substituída pela condição

$$c^*) \text{ Se } (A_1), (A_2), (A_3), \dots \text{ pertencem a } A \text{ então } (\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \text{ também pertence a } A$$

e o 3º axioma é substituído pelo seguinte axioma:

3º axioma* - Se $(A_1), (A_2), (A_3), \dots$ são acontecimentos disjuntos dois a dois, então

$$(P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i))$$

Os axiomas anteriores são conhecidos como a **axiomática de Kolmogorov**.

A probabilidade frequencista, laplaciana e subjetiva, verificam a axiomática de Kolmogorov.

Como consequência da axiomática anterior, resultam as seguintes propriedades para a Probabilidade, que facilmente se ilustram com a ajuda de diagramas de Venn e se demonstram a seguir:

Propriedades da Probabilidade

1. Probabilidade do acontecimento impossível, $(P(\emptyset) = 0)$

pois $\{(A \cup B) = (A-B) \cup (A \cap B) \cup (B-A)\}$, com $\{(A-B)\}$, $\{(A \cap B)\}$ e $\{(B-A)\}$ disjuntos dois a dois e tendo em consideração a propriedade anterior.

Esta fórmula generaliza-se ao caso de três acontecimentos (A) , (B) e (C)

$$\{(P(A \cup B \cup C)) = \{(P(A))\} + \{(P(B))\} + \{(P(C))\} - \{(P(A \cap B))\} - \{(P(A \cap C))\} - \{(P(B \cap C))\} + \{(P(A \cap B \cap C))\}\}$$

ou a mais acontecimentos, dando lugar à Fórmula de Daniel da Silva ^[1]

Ver

- Axiomatização do conceito de probabilidade por J. Sebastião e Silva ^[2]
- J. Sebastião e Silva, *Compêndio de Matemática*, 1º Volume, 2º Tomo ^[3]
- J. Sebastião e Silva, *Introdução ao Cálculo das Probabilidades: A - Frequências in Textos Didácticos* Vol. 1 ^[4]
- J. Sebastião e Silva, *Introdução ao Cálculo das Probabilidades: B - Probabilidades in Textos Didácticos* Vol. 1 ^[5]

Referências

1. GRAÇA MARTINS, M. E., MONTEIRO, C., VIANA, P. V., TURKMAN, M. A. A. (1999) – *Probabilidades e Combinatória*. Ministério da Educação, Departamento do Ensino Superior. ISBN: 972-8417-33-0. Depósito Legal 143440/99.
2. MANN, P. S. (1995) – *Introductory Statistics*, 2nd edition. John Wiley & Sons, Inc. ISBN: 0-471-31009-3.
3. PESTANA, D., VELOSA, S. (2010) – *Introdução à Probabilidade e à Estatística*, Volume I, 4ª edição, Fundação Calouste Gulbenkian. ISBN: 978-972-31-1150-7. Depósito Legal 311132/10.
4. SILVA, J.S. (1975) - *Compêndio de Matemática*, 1º Volume (2º TOMO) Gabinete de Estudos e Planeamento do Ministério da Educação e Cultura.
5. SILVA, J. - "Cálculo das Probabilidades", (Curso do Instituto Superior de Agronomia, 1955), *in Textos Didácticos*, Vol. 1, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1999.

Criada em 29 de Março de 2012

Revista em 22 de Maio de 2013

Aceite pelo editor em 22 de Maio de 2013

Referências

- [1] http://wikiciencias.casadasciencias.org/images/e/e9/Daniel_e_silva.pdf
 - [2] http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/images/0/07/P%C3%A1ginas_de_Comp%C3%AAndio_de_Matem%C3%A1tica%2C_1%C2%BA_Volume%2C_2%C2%BA_Tomo%2C_Cap%C3%ADtulo_VII_-_INTRODUÇÃO_AO_CÁLCULO_DAS_PROBABILIDADES.pdf
 - [3] http://www.fc.ul.pt/sites/default/files/fcul/dep/dm/obras_selecionadas/sebastiao_e_silva/compendios_de_matematica/CompendiodeMatematica-1Volume-2Tomo-fev13.pdf
 - [4] http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/images/3/3b/INTRO._Cal_das_PROBABILIDADES_A-_Frequ%C3%Aancias.pdf
 - [5] http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/images/c/c7/B-_Probabilidades_v3.pdf
-

Fontes e Editores da Página

Raízes de números complexos *Fonte:* <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?oldid=23044> *Contribuidores:* Admin

Derivadas das funções trigonométricas *Fonte:* <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?oldid=24374> *Contribuidores:* Admin

Axiomática da Probabilidade (Axiomática de Kolmogorov) *Fonte:* <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?oldid=24371> *Contribuidores:* Admin

Fontes, Licenças e Editores da Imagem

Ficheiro:Raizescubicas.png Fonte: <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Raizescubicas.png> Licença: desconhecido Contribuidores: Jntavar e Angela

Ficheiro:Raizesindice4.png Fonte: <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Raizesindice4.png> Licença: desconhecido Contribuidores: Jntavar e Angela

Ficheiro:Img_axiomaticav3_1_nome.png Fonte: http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Img_axiomaticav3_1_nome.png Licença: desconhecido Contribuidores: Rodrigue

Ficheiro:Img_axiomaticav3_2novo.png Fonte: http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Img_axiomaticav3_2novo.png Licença: desconhecido Contribuidores: Rodrigue

Ficheiro:Img_axiomaticav3_3novo.png Fonte: http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Img_axiomaticav3_3novo.png Licença: desconhecido Contribuidores: Rodrigue

Ficheiro:Img_axiomaticav3_4novo.png Fonte: http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Img_axiomaticav3_4novo.png Licença: desconhecido Contribuidores: Rodrigue

Ficheiro:Img_axiomaticav3_5novo.png Fonte: http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Img_axiomaticav3_5novo.png Licença: desconhecido Contribuidores: Rodrigue

Licença

Creative Commons - Atribuição - Uso Não Comercial - Partilha nos Mesmos Termos
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>
