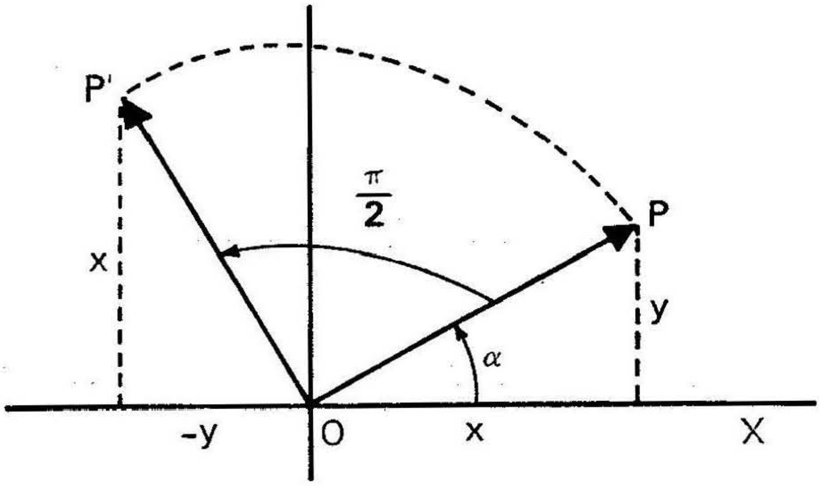
J. Sebastião e Silva, Compêndio de Matemática, 3º Volume

3. **Interpretação geométrica da multiplicação de números complexos.** Comecemos pelo seguinte caso particular:

Produto do número i *por um número complexo qualquer,*

$$z = x + iy \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$



Basta considerar o caso em que $z \neq 0$. Temos:

$$iz = -y + ix$$

$$|iz| = \sqrt{(-y)^2 + x^2} = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$$

Seja $r = |z|$, α o argumento principal de z e α' o argumento principal de iz. Virá, então:

$$\cos \alpha' = -\frac{y}{r} = -\operatorname{sen} \alpha \quad , \quad \operatorname{sen} \alpha' = \frac{x}{r} = \cos \alpha,$$

donde

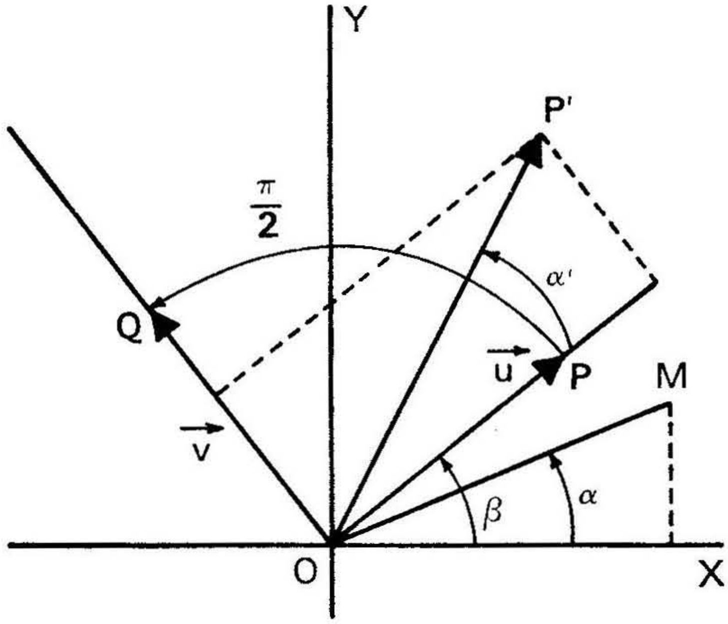
$$\alpha' \equiv \alpha + \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Por conseguinte: *a operação* $z \rightarrow iz$ (*multiplicação por* i) *traduz-se geometricamente pela rotação de* 90° *no sentido positivo.* (No caso da figura o sentido positivo é, como habitualmente, o sentido anti-horário.)

J. Sebastião e Silva, Compêndio de Matemática, 3° Volume

Podemos, agora, passar ao caso geral:

Produto de um número complexo $z = x + iy$ *por outro número complexo,* $w = u + iv$ $(\forall\, x, y, u, v \in \mathbb{R})$.



Basta considerar o caso em que $z \neq 0$ e $w \neq 0$. Suponhamos que se tem, na forma trigonométrica:

$$(1) \qquad z = r\,E(\alpha) \quad , \quad w = \rho E(\beta)$$

(α, β argumentos principais)

Sejam M, P, P', Q os pontos que representam z, w, zw, iw, respectivamente, e ponhamos

$$\vec{u} = \overrightarrow{OP} \quad , \quad \vec{v} = \overrightarrow{OQ}$$

Então $\vec{v}$ resulta de $\vec{u}$ por uma rotação de 90° no sentido positivo. Ora

$$zw = (x + iy)\, w = xw + y(iw) \qquad \text{(porquê?)}$$

J. Sebastião e Silva, Compêndio de Matemática, 3º Volume

Logo, segundo o estabelecido no n.º 1:

$$(2) \qquad \overrightarrow{OP'} = x\,\vec{u} + y\,\vec{v}$$

Além disso

$$(3) \qquad |\vec{u}| = |\vec{v}| = |\vec{w}|$$

Consideremos agora o referencial cujo 1.º eixo é a recta OP orientada de O para P, cujo 2.º eixo é a recta OQ orientada de O para Q e cuja unidade de comprimento é igual à do primeiro referencial. Então de (2) e (3) resulta que a abcissa e a ordenada de P′ no novo referencial são, respectivamente,

$$x' = x\,\rho \quad , \quad y' = y\,\rho$$

donde $\quad |OP'| = \sqrt{(x\,\rho)^2 + (y\,\rho)^2} = \rho\,\sqrt{x^2 + y^2} = \rho\, r$

ou seja
$$|zw| = r\,\rho$$

Por outro lado, *se for* α' *a medida principal do ângulo orientado* $P\hat{O}P'$, tem-se

$$\cos\,\alpha' = \frac{x\,\rho}{r\,\rho} = \frac{x}{r} = \cos\,\alpha \quad , \quad \operatorname{sen}\,\alpha' = \frac{y\,\rho}{r\,\rho} = \frac{y}{r} = \operatorname{sen}\,\alpha$$

donde

$$\alpha' = \alpha$$

Ora

$$(4) \qquad X\hat{O}P' = X\hat{O}P + P\hat{O}P' \qquad \text{(ângulos orientados)}$$

Como o segundo referencial está orientado no mesmo sentido que o primeiro (sentido anti-horário na figura), deduz-se de (4) que *um dos argumentos de* zw — medida do ângulo orientado $X\hat{O}P'$ — será o número

$$\beta + \alpha' = \alpha + \beta$$

J. Sebastião e Silva, Compêndio de Matemática, 3° Volume

Assim, em conclusão:

$$(5) \qquad zw = (r\,\rho)\ E\ (\alpha + \beta)$$

Comparando (1) e (5), chegamos à seguinte

REGRA. *O produto de dois números complexos tem por módulo o produto dos módulos dos factores e por argumento (entre outros) a soma dos argumentos dos factores.*

É claro que esta regra também é válida se um dos factores é 0 (argumento arbitrário).

Em particular, mantém-se a PROPRIEDADE DO MÓDULO DO PRODUTO:

$$\boxed{|zw| = |z| \cdot |w| \quad , \quad \forall\, z, w \in \mathbb{C}}$$

que já se verificava em $\mathbb{R}$, tal como a PROPRIEDADE DO MÓDULO DA SOMA (n.º 2).

Geometricamente, vimos que se passa do vector $\overrightarrow{OP}$, representativo de w, para o vector $\overrightarrow{OP'}$, representativo de zw, efectuando a rotação de amplitude α e em seguida a homotetia de razão r (ou vice-versa). Assim:

A aplicação $w \hookrightarrow zw$ *(multiplicação pelo número complexo* z*) traduz-se por uma transformação de semelhança: produto da rotação de amplitude* α *(argumento de* z*) pela homotetia de razão* r *(módulo de* z*).*

EXERCÍCIOS — I. Desenhe o triângulo cujos vértices são as imagens dos números

$$1 \quad , \quad 2 + 2i \quad , \quad \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

e, em seguida, o triângulo cujos vértices correspondem aos produtos destes números por $-\sqrt{2}(1 + i)$ (dados a azul e resultados a vermelho).

J. Sebastião e Silva, Compêndio de Matemática, 3° Volume

II. Mostre que os números complexos z tais que $|z| = 1$ formam um grupo multiplicativo isomorfo ao grupo multiplicativo das rotações do plano e ao grupo aditivo das classes de congruência de números reais para o módulo 2π.

III. Mostre que os conjuntos $\{1, i, -1, -i\}$ e

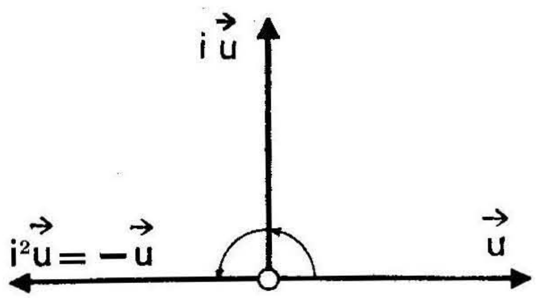
$$\left\{1, \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -1, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$$

são subgrupos multiplicativos do grupo anterior.

(Sugestão: nestes três exercícios convém usar a forma trigonométrica.)

NOTA IMPORTANTE. Os factos anteriores mostram que os números complexos podem ser interpretados como *operadores sobre vectores do plano*. Nesta ordem de ideias, o símbolo $E(\alpha)$ representa o operador *rotação de amplitude* α. Em particular, o número i é a rotação de 90° (no sentido positivo) e portanto o número $i^2 = i \cdot i$ é a rotação de 180°:

$$i^2\vec{u} = i(i\,\vec{u}) = -\vec{u} = (-1)\,\vec{u}$$



Assim obtemos uma interpretação intuitiva da fórmula:

$$i^2 = -1$$

J. Sebastião e Silva, Compêndio de Matemática, 3° Volume

5. **Potências de números complexos na forma trigonométrica.** A regra da multiplicação estabelecida no n.° **3** estende-se imediatamente a produtos de mais de dois factores. Assim, se forem dados *n* números

$$z_1 = r_1\, E(\alpha_1) \quad , \quad z_2 = r_2\, E(\alpha_2) \quad , \quad \ldots \quad , \quad z_n = r_n\, E(\alpha_n)$$

tem-se, manifestamente:

$$z_1\, z_2 \ldots z_n = (r_1\, r_2 \ldots r_n)\; E(\alpha_1\; \alpha_2 \ldots \alpha_n)$$

ou seja

$$\prod_{k=1}^{n} z_k = \left(\prod_{k=1}^{n} r_k\right) E\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k\right)$$

Em particular, os factores podem ser todos iguais:

$$z_1 = z_2 = \ldots = z_n$$

Designemo-los por z e seja $z = r\; E(\alpha)$. Então virá

$$\boxed{z^n = [r\; E(\alpha)]^n = r^n\; E(n\; \alpha)}$$

6. **Radiciação no corpo complexo.** Suponhamos que é *dado* um número complexo $z \neq 0$ e que se *procura* ζ tal que

$$(1) \qquad \zeta^n = z$$

Ponhamos

$$z = r\; E(\alpha) \quad , \quad \zeta = \rho\, E(\varphi)$$

Então, segundo a regra anterior, tem-se:

$$\zeta^n = z \Leftrightarrow \rho^n\, E(n\, \varphi) = r\, E(\alpha),$$