

Conteúdo

Páginas

Limites trigonométricos notáveis	1
Seno de um ângulo agudo	3
Tabelas de verdade	4
Potências de números complexos (de expoente natural)	7

Referências

Fontes e Editores da Página	10
Fontes, Licenças e Editores da Imagem	11

Licenças das páginas

Licença	12
---------	----

Limites trigonométricos notáveis

Referência : Nuno Tavares, J., Geraldo, A. (2013), WikiCiências, 4(02):0765

Autor: João Nuno Tavares e Ângela Geraldo

Editor: José Francisco Rodrigues

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

Quando a variável (x) é expressa em radianos

<pre><ggb_applet height="350" width="370" showResetIcon="true" filename="Relacaofund1.ggb" /></pre>	Da figura observamos: - O triângulo (ODB) é semelhante ao triângulo (OAC) e daí que $\frac{BD}{OD} = \frac{AC}{OA}$, isto é, $\frac{r \sin x}{r \cos x} = \frac{AC}{r}$, o que implica que $AC = r \sin x \cos x = r \tan x$. $(DB < \text{arc}) \Rightarrow AB < AC$ isto é $r \sin x < r \tan x$ De facto, $AB = r \cdot x$, uma vez que, por hipótese, (x) é expresso em radianos. Dividindo todos os membros por $(r > 0)$, obtemos $\sin x < \tan x$ Supondo que $(x > 0)$, embora próximo de (0), sabemos que $(\sin x > 0)$ e podemos dividir as desigualdades anteriores por $(\sin x > 0)$, para obter $1 < \frac{x}{\cos x}$ Fazendo $(x \rightarrow 0)$, e atendendo a que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$, obtemos por enquadramento que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ Como $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, resulta também que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$ Note que este resultado é válido quando (x) é expresso em radianos .
---	--

Quando a variável (x°) é expressa em graus

<pre><ggb_applet height="350" width="370" showResetIcon="true" filename="Relacaofund2.ggb" /></pre>	Como no ponto anterior, temos que $AC = r \sin x^\circ \cos x^\circ = r \tan x^\circ$, e $(DB < \text{arc}) \Rightarrow AB < AC$, isto é $r \sin x^\circ < r \tan x^\circ$ já que agora $AB = r \cdot x^\circ$, uma vez que, por hipótese, (x°) é expresso em graus. De facto $\begin{array}{ccc} 360^\circ & \longrightarrow & 2\pi \text{ rad} \\ x^\circ & \longrightarrow & a \end{array}$ o que implica que $AB = r \cdot x^\circ = r \cdot \frac{2\pi}{360} \cdot x^\circ = r \cdot \frac{\pi}{180} \cdot x^\circ$. Dividindo todos os membros por $(r > 0)$, obtemos $\sin x^\circ < \frac{\pi}{180} x^\circ$ Supondo que mais uma vez que $(x^\circ > 0)$, embora próximo de (0), sabemos que $(\sin x^\circ > 0)$ e podemos dividir as desigualdades anteriores por $(\sin x^\circ > 0)$, para obter
---	--

	$\left(\frac{1}{x^\alpha} < \frac{\pi}{180^\circ} \right) \frac{x^\alpha}{\sin x^\alpha} < \frac{1}{\cos x^\alpha}$ Fazendo $(x^\alpha \rightarrow 0)$, e atendendo a que $\lim_{x^\alpha \rightarrow 0} \cos x^\alpha = 1$, obtemos por enquadramento que $\lim_{x^\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin x^\alpha}{x^\alpha} = \frac{\pi}{180^\circ}$
--	--

Note que este resultado é mais complicado do que o anterior, devido ao aparecimento do factor extra $\frac{\pi}{180^\circ}$ que resulta de ser $x^\alpha = \frac{180^\circ}{\pi} x$. Por isso há toda a conveniência em exprimir a variável em radianos, para que o limite seja: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Supomos que (x) é expresso em radianos e aplicamos a fórmula trigonométrica $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$. Vem então que

$$\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x} = \frac{-2 \sin \frac{x+0}{2} \sin \frac{x-0}{2}}{x}$$

Daí que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x/2)}{x/2} \sin(x/2) = -1 \times 0 = 0$$

Criada em 2 de Janeiro de 2013

Revista em 7 de Fevereiro de 2013

Aceite pelo editor em 7 de Fevereiro de 2013

Seno de um ângulo agudo

Referência : Nuno Tavares, J., Geraldo, A. (2013), WikiCiências, 4(02):0766

Autor: João Nuno Tavares e Ângela Geraldo

Editor: José Francisco Rodrigues

Definição

<pre><ggb_applet height="450" width="400" showResetIcon="true" filename="Seno7.ggb" /></pre>	Para definir o seno de um ângulo agudo de amplitude $\alpha \in]0,90^\circ[$, fazemos a construção seguinte que se ilustra no applet 1. escolhemos um ponto qualquer (C) num dos lados do ângulo. Por exemplo, no applet, escolhemos o ponto (C) num dos lados do ângulo (no applet escolhemos o lado horizontal); 2. construímos a perpendicular a esse lado que passa em (C); 3. essa perpendicular intersecta o outro lado em (B) e, desta forma, obtemos o triângulo retângulo representado na figura - o triângulo (ACB), retângulo em (C). O seno de α define-se agora através da razão $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ onde a é o comprimento do cateto (BC) e c é o comprimento da hipotenusa (AB). No applet pode escolher o valor de α com o cursor (a verde, à esquerda na figura). Note ainda que o valor de $\sin \alpha$ não depende do ponto (C) escolhido no passo nº1 (pode verificar isso, variando a posição de (C) no applet). De facto, variando (C) obtemos triângulos retângulos, semelhantes entre si, e portanto, a razão $\frac{a}{c}$ não muda.
--	---

Nota:

Para qualquer ângulo agudo de amplitude $\alpha \in]0,90^\circ[$, $0 < \sin \alpha < 1$.

Exemplos

Para calcular o seno de um ângulo agudo podemos pois usar um triângulo retângulo qualquer. Por exemplo, na figura 1 usamos um triângulo retângulo cuja hipotenusa é $(c=20)$, para calcular o seno de (30°) . Como é claro da figura 2 (justifique), o cateto a é metade da hipotenusa, isto é, $a=10$ e portanto

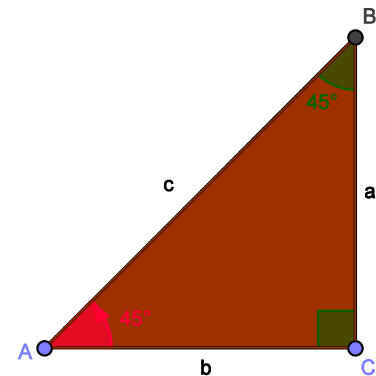
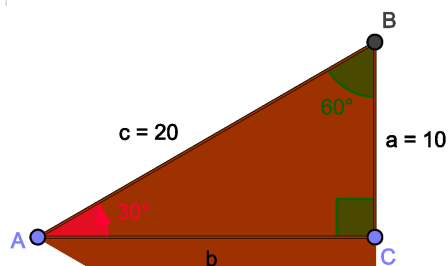
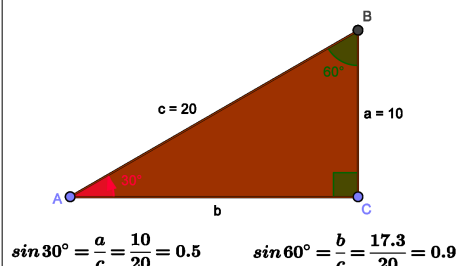
$$\sin 30^\circ = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$$

Por outro lado, pelo teorema de Pitágoras, $c^2 = a^2 + b^2$, e substituindo os valores de $(c=20)$ e $(a=10)$, obtemos $b = \sqrt{400 - 100} = 10\sqrt{3}$. Portanto

$$\sin 60^\circ = \frac{b}{c} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Na figura 3 usamos um triângulo retângulo isósceles (os dois catetos com o mesmo comprimento, $a=b$), para calcular o seno de (45°) . Pelo teorema de Pitágoras $c^2 = a^2 + b^2 = 2a^2$, uma vez que $a=b$. Portanto, $c = \sqrt{2}a$ e daí que

$$\sin 45^\circ = \frac{a}{c} = \frac{a}{\sqrt{2}a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$



Ver

- Relações trigonométricas num triângulo retângulo

Criada em 11 de Dezembro de 2012

Revista em 13 de Fevereiro de 2013

Aceite pelo editor em 13 de Fevereiro de 2013

Tabelas de verdade

Referência : Nuno Tavares, J., Geraldo, A. (2013), WikiCiências, 4(02):0767

Autor: João Nuno Tavares e Ângela Geraldo

Editor: José Francisco Rodrigues

Tabelas de verdade

As **tabelas de verdade** são tabelas matemáticas usadas em Lógica para determinar o valor lógico de uma proposição composta, isto é, uma proposição que resulta de uma operação entre proposições simples. O valor lógico da proposição composta é assim determinado a partir dos valores lógicos já conhecidos das proposições simples, sendo por isso dependente dos mesmos.

De negação

O valor lógico da proposição $\neg P$ (também indicado por $\neg P$) é dado em função do valor lógico da proposição P .

Por palavras: $\neg P$ é verdadeira quando P é falsa, e é falsa quando P é verdadeira.

Numa tabela:

P	$\neg P$
V	F
F	V

De conjunção

O valor lógico da proposição $P \wedge Q$ é dado em função do valor lógico das proposições P e Q .

Por palavras:	<i>Uma proposição do tipo $P \wedge Q$ é verdadeira quando, e só quando, ambas as proposições, P e Q forem verdadeiras. Ou seja, a proposição $P \wedge Q$ é falsa quando pelo menos uma das proposições, P ou Q, for falsa.</i>
---------------	--

Numa tabela:

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

De disjunção

O valor lógico da proposição $P \vee Q$ é dado em função do valor lógico das proposições P e Q .

Por palavras:	<i>Uma proposição do tipo $P \vee Q$ é verdadeira quando, e só quando, pelo menos uma das proposições, P ou Q, for verdadeira. Ou seja, a proposição $P \vee Q$ é falsa quando as duas proposições, P e Q, forem ambas falsas.</i>
---------------	--

Numa tabela:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

De implicação

O valor lógico da proposição $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ é dado em função do valor lógico das proposições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

Por palavras:	<i>Uma proposição do tipo $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$, que traduz o facto de a validade de $\mathcal{P}$ implicar a validade de $\mathcal{Q}$ é falsa quando e apenas quando a proposição $\mathcal{P}$ for verdadeira mas $\mathcal{Q}$ não o for.</i>
---------------	--

Numa tabela:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

De equivalência

As tabelas de verdade para a equivalência de proposições permitem determinar quando é que duas proposições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são equivalentes do ponto de vista lógico. Mais uma vez, esse valor lógico é dado em função dos valores lógicos das proposições $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$.

Por palavras:	<i>$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ é verdadeira quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e é falsa quando $\mathcal{P}$ é verdadeira e $\mathcal{Q}$ é falsa, ou vice-versa.</i>
---------------	--

Numa tabela:

$\mathcal{P}$	$\mathcal{Q}$	$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Usando as tabelas de verdade

Podemos usar as tabelas de verdade para mostrar por exemplo que:

$$\sim (P \rightarrow Q) \quad \Leftrightarrow \quad P \wedge \sim Q$$

Construindo uma tabela de valores lógicos:

P	Q	$\sim (P \rightarrow Q)$	$P \rightarrow Q$	$\sim (P \rightarrow Q) \Leftrightarrow P \wedge \sim Q$	$P \wedge \sim Q$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	F	F

Portanto a negação de (se P então Q) é equivalente a (P e não Q)).

Potências de números complexos (de expoente natural)

Referência : Nuno Tavares, J., Geraldo, A. (2013), WikiCiências, 4(02):0768

Autor: João Nuno Tavares e Ângela Geraldo

Editor: José Francisco Rodrigues

Definição

As potências de expoente natural (inteiro positivo) de um número complexo z são os números complexos w tais que $w = z^n$ com $n \in \mathbb{N}$.

Potências de i

Sabemos que i , unidade imaginária, é uma solução da equação $x^2+1=0$, sendo $i=\sqrt{-1}$. Portanto, as primeiras potências de i correspondem a

$$i^2=-1$$
$$i^3=i^2 \times i=-1 \times i=-i$$
$$i^4=(i^2)^2=(-1)^2=1$$
$$i^5=i^4 \times i=1 \times i=i$$
$$i^6=(i^2)^3=(-1)^3=-1$$
$$i^7=i^6 \times i=-1 \times i=-i$$
$$i^8=(i^4)^2=i^2=-1$$

Considerando $n \in \mathbb{N}$ (n inteiro positivo), facilmente se prova que as potências de i de expoente superior a 3 são dadas por:

$\begin{aligned} i^{4k} &= 1 \\ i^{4k+1} &= i \\ i^{4k+2} &= -1 \\ i^{4k+3} &= -i \end{aligned}$	$\text{<ggg_applet height="350" width="300" showResetIcon="true" filename="Potencias_ia.ggb" />}$
--	---

• Atenção

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} \neq \sqrt{(-1) \times (-1)} = \sqrt{1} = 1$$

$$\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = (-1) \times i = i^2 = -1$$

Potências de números complexos

Forma algébrica

Considerando (z) um número complexo representado na sua forma algébrica, $(z=a+bi)$, com (a) e $(b \in \mathbb{R})$, calculamos as potências de (z) de expoente natural do seguinte modo:

$$z^2 = (a+bi)^2 = a^2 + 2abi + b^2 i^2 = a^2 + 2abi - b^2 = (a^2 - b^2) + (2ab)i$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = (a^2 - b^2 + 2abi) \cdot (a+bi) = a^3 - a^2 b^2 + 2a^2 bi + a^2 bi - b^3 i^2 + 2a b^2 i = a^3 - 3ab^2 + 3a^2 bi - b^3 i = (a^3 - 3ab^2) + (3a^2 b - b^3)i$$

$$z^4 = z^2 \cdot z^2 = (a^2 - b^2 + 2abi)^2 = a^4 - 2a^2 b^2 + 2a^3 bi - b^4 + 2ab^2 i + 2a^2 bi^2 - 2ab^2 i + 4a^2 b^2 i^2 = a^4 - 6a^2 b^2 + 4a^3 bi - 4ab^3 i + b^4 = (a^4 - 6a^2 b^2 + b^4) + (4a^3 b - 4ab^3)i$$

(vdots)

Recorrendo ao Binómio de Newton podemos calcular as potências de expoente natural de qualquer número complexo da seguinte forma:

$$(a+bi)^n = \binom{n}{0} a^n (bi)^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} (bi)^1 + \binom{n}{2} a^{n-2} (bi)^2 + \dots + \binom{n}{n} a^0 (bi)^n$$

onde $\binom{n}{k}$ são os **coeficientes binomiais**, (n) e (k) inteiros, $(k \leq n)$, definidos como,

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Forma polar

Considerando agora um número complexo (z) representado na forma polar, $(z=|z| \operatorname{cis}(\alpha) = |z| (\cos \alpha + i \sin \alpha)) = e^{i\alpha}$ (fórmula de Euler). Podemos calcular as potências de (z) :

$$z^2 = (|z| \operatorname{cis}(\alpha))^2 = |z|^2 \operatorname{cis}(2\alpha)$$

$$z^3 = z^2 \cdot z = (|z|^2 \operatorname{cis}(2\alpha)) \cdot (|z| \operatorname{cis}(\alpha)) = |z|^3 \operatorname{cis}(3\alpha)$$

(vdots)

$$z^n = (|z| \operatorname{cis}(\alpha))^n = |z|^n \operatorname{cis}(n\alpha),$$

através da fórmula de De Moivre $(\operatorname{cis}(\alpha))^n = \operatorname{cis}(n\alpha)$.

Determinar potências de números complexos (applet)

$\text{<ggg_applet height="400" width="600" showResetIcon="true" filename="Potencias12a3.ggb" />}$	$z < 1$, isto é, quando (z) está dentro do círculo unitário centrado na origem, (ii). quando $(z =1)$, isto é, quando (z) está sobre a circunferência unitária centrada na origem, e (iii). quando $(z >1)$, isto é, quando (z) está fora do círculo unitário centrado na origem?
---	--

Ver

- Interpretação geométrica da multiplicação de números complexos, Potências de números complexos na forma trigonométrica por J. Sebastião e Silva ^[1]
- J. Sebastião e Silva, Compêndio de Matemática, 3º Volume ^[2]

Criada em 12 de Novembro de 2012

Revista em 15 de Fevereiro de 2013

Aceite pelo editor em 15 de Fevereiro de 2013

Referências

[1] <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/images/8/8d/PotenciasJSS.pdf>

[2] http://www.fc.ul.pt/sites/default/files/fcul/dep/dm/obras_seleccionadas/sebastiao_e_silva/compendios_de_matematica/Comp%EAndio%20da%20Matem%E1tica%2C%203%BA%20Volume.pdf

Fontes e Editores da Página

Limites trigonométricos notáveis *Fonte:* <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?oldid=22044> *Contribuidores:* Admin

Seno de um ângulo agudo *Fonte:* <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?oldid=22108> *Contribuidores:* Admin

Tabelas de verdade *Fonte:* <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?oldid=24377> *Contribuidores:* Admin

Potências de números complexos (de expoente natural) *Fonte:* <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?oldid=24376> *Contribuidores:* Admin

Fontes, Licenças e Editores da Imagem

Ficheiro:Seno8aa.png Fonte: <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Seno8aa.png> Licença: desconhecido Contribuidores: Jntavar e Angela

Ficheiro:Seno8a.png Fonte: <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Seno8a.png> Licença: desconhecido Contribuidores: Jntavar e Angela

Ficheiro:Seno9.png Fonte: <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?title=Ficheiro:Seno9.png> Licença: desconhecido Contribuidores: Jntavar e Angela

Licença

Creative Commons - Atribuição - Uso Não Comercial - Partilha nos Mesmos Termos
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>
