pares, o conjunto dos quadrados perfeitos, o conjunto dos números primos maiores que 10^6, etc., etc.

Pelo contrário, o conjunto dos números primos menores que 10^6 é *finito*. Outros exemplos: o conjunto dos cidadãos portugueses numa dada época, o conjunto dos grãos de trigo contidos num depósito, o conjunto dos átomos de hidrogénio contidos num balão, etc., etc.

Quando um conjunto é infinito, é impossível defini-lo indicando quais são os seus elementos. Logo, se um conjunto pode ser definido pela indicação dos seus elementos, esse conjunto não é infinito: *é finito*.

Mas há conjuntos finitos que, no estado actual da ciência, não podemos definir fazendo uma lista dos seus elementos: tal é, por exemplo, o caso do conjunto dos números primos menores que 10^{1000}.

Em escrita simbólica, é costume designar um conjunto finito (quando possível) pelas designações dos seus elementos, escritas entre chavetas e separadas por vírgulas. Assim, as expressões

$$\{\text{Sol, Terra, Lua}\} \quad , \quad \{1, 5, 40, 327\}$$

designam, respectivamente, o conjunto cujos elementos são o Sol, a Terra e a Lua, e o conjunto cujos elementos são os números 1, 5, 40 e 327. Se designarmos o primeiro conjunto por A e o segundo por B, teremos portanto:

$$\text{Sol} \in A \quad , \quad \text{Sirius} \notin A \quad , \quad 5 \in B \quad , \quad 2 \notin B \quad , \quad \text{etc.}$$

9. **Valores lógicos das proposições.** Dizemos que são *verdadeiras*, por exemplo, as proposições: 'A Terra é um planeta', 'Pedro Álvares Cabral descobriu o Brasil', '3 + 2 = 5', etc., etc. Dizemos que são *falsas*, por exemplo, as proposições: 'A Lua é uma estrela', 'Dante escreveu a Odisseia', '9 é um número primo', etc.

Mas não é raro surgir uma proposição, a respeito da qual se diz que é ao mesmo tempo verdadeira e falsa ou então que é parcialmente verdadeira ou aproximadamente verdadeira ou duvidosa ou desprovida de sentido. Pode acontecer isto, por exemplo, a respeito de frases tais como 'A música de Strawinski é bela', 'Évora é uma cidade' (1), 'Ava Gardner é uma estrela', 'Os satélites artificiais são astros', '25 é um número pequeno', 'A água é um líquido incolor', 'O calor dilata os corpos', 'Amanhã chove', etc., etc.

A dúvida suscitada por tais proposições provém geralmente, ou da nossa *ignorância* sobre o assunto, ou (o que por vezes é equivalente) da *imprecisão de linguagem,* resultante do uso de termos não definidos ou ambíguos, bem como da ausência de termos necessários para completar o sentido da frase. Ora, a matemática aspira ao rigor absoluto de linguagem, procurando evitar *termos imprecisos* e *frases incompletas*.

Nestas condições, a lógica matemática adopta como regras fundamentais do pensamento, os dois seguintes princípios (ou axiomas):

PRINCÍPIO DA NÃO CONTRADIÇÃO. *Uma proposição não pode ser verdadeira e falsa ao mesmo tempo*.

PRINCÍPIO DO TERCEIRO EXCLUÍDO. *Uma proposição ou é verdadeira ou é falsa (isto é, verifica-se sempre um destes casos e nunca um terceiro)*.

Diz-se que o valor duma proposição é a *verdade* ou a *falsidade,* conforme essa proposição é verdadeira ou falsa. Os valores lógicos verdade e falsidade podem ser designados abreviadamente pelas letras V e F ou pelos símbolos 1 e 0, respectivamente. Assim, o que os princípios da não contradição e do terceiro excluído afirmam é que:

Toda a proposição tem um, e um só, dos valores V, F.

Diz-se que duas proposições são *equivalentes* quando têm o mesmo valor lógico, isto é, quando são ambas verdadeiras ou

---

(1) Existe uma povoação na Beira com este nome.

ambas falsas. Para indicar que duas proposições são equivalentes, escreve-se entre ambas o sinal =. Exemplos:

7 é primo = 2 é par

Lisboa é uma aldeia = Marte é uma estrela

Assim, o sinal = exprime apenas identidade entre os valores lógicos das proposições: não se refere propriamente ao significado das mesmas. Poderíamos dizer que uma proposição *representa* um dos valores V, F, embora não seja designação.

10. **Operações lógicas sobre proposições.** Quando pensamos, efectuamos muitas vezes certas operações sobre proposições, chamadas operações lógicas. Estas estão submetidas a regras dum cálculo (chamado *cálculo proposicional*) semelhante ao da aritmética sobre números. Vamos estudar as operações lógicas fundamentais:

a) *Negação.* A mais simples operação lógica é a negação, que consiste em converter uma dada proposição numa outra, que é verdadeira se a primeira é falsa, e falsa se esta é verdadeira. A proposição assim obtida também se diz negação da primeira.

Na linguagem comum, a negação efectua-se, nos casos mais simples, antepondo o advérbio 'não' ao verbo da proposição dada. Assim, por exemplo, a negação de 'O Sol é um planeta' é 'O Sol não é um planeta'. Mas já a negação de 'Todos os homens são inteligentes' é 'Nem todos os homens são inteligentes' e a de 'Nenhum homem é inteligente' é 'Algum homem é inteligente'.

Em lógica simbólica a negação é indicada antepondo um determinado sinal à proposição a negar. Para esse fim, usaremos o sinal '$\sim$' que se pode ler 'não é verdade que'. Assim, a negação de '*Todos os homens são inteligentes*' escreve-se:

$\sim$ *Todos os homens são inteligentes* o que se pode ler: '*Não é verdade que todos os homens são inteligentes*'. Analogamente, a negação da proposição '$7 > 3$' (verdadeira) é a proposição (falsa):

$$\sim (7 > 3)$$

que se lê: 'Não é verdade que 7 é maior que 3' ou simplesmente '7 não é maior que 3'.

b) *Conjunção.* Consideremos as duas seguintes proposições:

'O Sol é uma estrela' , 'A Lua é um satélite da Terra'.

Ambas são verdadeiras e é, portanto, verdadeira a proposição:

'O Sol é uma estrela e a Lua é um satélite da Terra'

que se obtém ligando as duas primeiras pela conjunção copulativa 'e'. Mas já é falsa a proposição:

'Vénus é uma estrela e a Lua é um planeta'

por não serem verdadeiras ambas as proposições ligadas pela palavra 'e' (embora seja verdadeira a segunda).

A palavra 'e' funciona pois aqui como sinal de uma operação lógica que, aplicada a duas proposições, dá origem a uma nova proposição, que será verdadeira se as proposições dadas forem ambas verdadeiras (e só nesse caso). A esta operação lógica dá-se o nome de *conjunção*; diz-se também que a proposição obtida é a conjunção das duas primeiras.

Em lógica simbólica, indicaremos a conjunção com o sinal '$\wedge$' que se lê 'e'. Assim, poderemos escrever:

O Sol é uma estrela $\wedge$ a Lua é um satélite da Terra.

Analogamente, são verdadeiras, como é fácil ver, as proposições:

$$2 + 3 = 5 \wedge \sqrt{9} = 3 \quad , \quad \sqrt{8} \neq 3 \wedge \pi < 3{,}15$$

e falsas as proposições:

$$2 + 3 = 5 \wedge \pi > 4 \quad , \quad 3 < 1 \wedge \sqrt{-4} = -2$$

c) *Disjunção.* Consideremos as duas seguintes proposições (1):

'Carlos é médico ou professor, ou ambas as coisas'.

'Vamos ao teatro ou vamos dar um passeio, mas não as duas coisas'.

No primeiro caso está-se a indicar que uma, pelo menos, das proposições 'Carlos é médico', 'Carlos é professor', é verdadeira, podendo sê-lo ambas. No segundo caso está-se a precisar que uma e só uma das proposições 'Vamos ao teatro', 'Vamos dar um passeio' é verdadeira.

De um modo geral, quando, a respeito de duas proposições, se indica que uma delas, pelo menos, é verdadeira, forma-se uma nova proposição, que se chama *disjunção inclusiva* das primeiras. Quando se indica que uma, e só uma, das proposições consideradas é verdadeira, forma-se uma nova proposição, denominada *disjunção exclusiva* das primeiras. Também se dá o nome de *disjunção* (inclusiva ou exclusiva) à operação lógica que consiste em passar das proposições dadas para a sua disjunção (respectivamente inclusiva ou exclusiva).

Assim, a primeira proposição do exemplo anterior é a disjunção inclusiva das proposições 'Carlos é médico', 'Carlos é professor', enquanto a segunda é a disjunção exclusiva das proposições 'Vamos ao teatro,' 'Vamos dar um passeio'.

Como se vê, a palavra 'ou' (que em gramática se chama conjunção disjuntiva) não permite, só por si, distinguir a disjunção inclusiva da exclusiva. Em latim, a palavra 'vel' tem aproximadamente o signi-

---

(1) Presume-se que estas frases são ditas em circunstâncias particulares, em que assumem um significado preciso e, portanto, um valor determinado.

ficado do 'ou' inclusivo; daí o adoptar-se, em lógica matemática, para a disjunção inclusiva, o sinal '$\vee$' que, por comodidade, se lê simplesmente 'ou'. Assim, a primeira proposição do exemplo anterior pode escrever-se, agora, sem perigo de confusão:

Carlos é médico $\vee$ Carlos é professor.

Segundo esta convenção, serão verdadeiras, como é fácil ver, as proposições:

$$3 < 5 \vee 3 + 2 = 5 \quad , \quad \pi = 4 \vee \pi < 4$$

e falsas as proposições:

$$5 < 3 \vee 3 + 2 = 7 \quad , \quad \sqrt{-4} = -2 \vee \sqrt{10} = 3$$

Para a disjunção exclusiva usaremos o sinal '$\dot{\vee}$'.

Normalmente, quando se diz apenas 'disjunção' subentende-se que se trata da disjunção inclusiva.

11. As operações lógicas, consideradas como operações sobre valores lógicos. Já atrás se disse que designamos por 'V' o valor verdade e por 'F' o valor falsidade. Para determinar o valor lógico da negação, da conjunção e da disjunção, a partir dos valores lógicos das proposições dadas, podem utilizar-se as seguintes tabelas, habitualmente chamadas *tabelas de verdade:*

p	~p
V	F
F	V

$p \wedge q$

p \ q	V	F
V	V	F
F	F	F

$p \vee q$

p \ q	V	F
V	V	V
F	V	F

As duas últimas são tabelas de duas entradas, semelhantes à tábua pitagórica da multiplicação: por elas se vê imediatamente que o valor da conjunção é V, quando ambos os dados têm o valor V (e só nesse caso); e que o valor da disjunção é V, quando um pelo menos dos dados tem o valor V (e só nesse caso).

Estas tabelas induzem-nos a considerar a negação, a conjunção e a disjunção, não propriamente como operações sobre proposições, mas sim como operações sobre valores lógicos. Assim, o resultado da negação sobre os valores lógicos V e F será, respectivamente, F e V, ou seja, em símbolos:

$$\sim V = F \quad , \quad \sim F = V.$$

Analogamente, ter-se-á:

$$V \wedge V = V \quad , \quad V \wedge F = F \wedge V = F \quad , \quad F \wedge F = F$$

$$V \vee V = V \quad , \quad V \vee F = F \vee V = V \quad , \quad F \vee F = F$$

Trata-se agora, muito simplesmente, de operações definidas num conjunto formado apenas por dois elementos (o valor V e o valor F), conjunto que podemos designar abreviadamente pela notação {V, F}.

Tais operações são definidas pelas anteriores tabelas, tabuadas dessas operações.

Este novo ponto de vista simplifica consideravelmente o estudo da lógica, como teremos ocasião de verificar.

12. **As operações lógicas e as máquinas de calcular.** O funcionamento dos modernos computadores electrónicos baseia-se em grande parte na lógica matemática. Vamos apresentar os esquemas de circuitos eléctricos que efectuam as operações de conjunção, disjunção e negação, em máquinas de tipo simples, com base em electroímanes (nas máquinas electrónicas, muito mais rápidas, a ideia é essencialmente a mesma, sendo os electroímanes substituídos por válvulas electrónicas).

O *circuito de conjunção* (ou *circuito 'e'*) é esquematizado na fig. 1; o *circuito de disjunção* (ou *circuito* 'ou') na fig. 2 e o circuito de negação (ou *circuito 'não'*) na fig. 3.

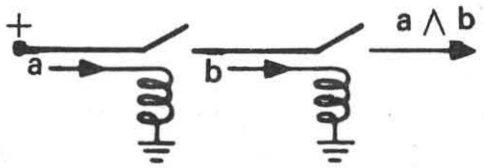


Fig. 1

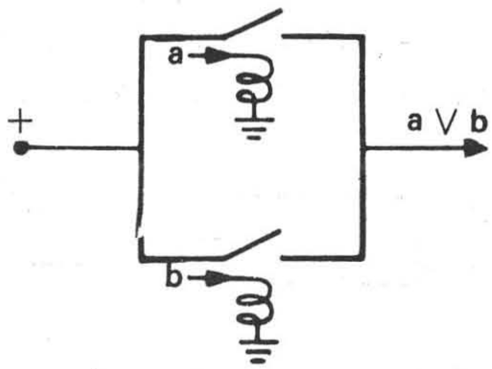


Fig. 2

O valor lógico V traduz-se, neste caso, por *passagem da corrente* e o valor F por *ausência de corrente*.

No primeiro esquema os interruptores estão postos *em série* e, portanto, só haverá corrente no circuito quando se lançar corrente nas duas bobinas *ao mesmo tempo*, fechando os dois interruptores que, de outro modo, se mantêm abertos por meio de molas. Assim, o resultado será V, quando, e só quando, *ambos* os dados *a* e *b* forem V: trata-se, pois, da conjunção.

No segundo esquema os interruptores estão postos *em paralelo* e, portanto, passará corrente no circuito quando (e só quando) se lançar corrente numa, pelo menos, das bobinas: trata-se, pois, da disjunção.

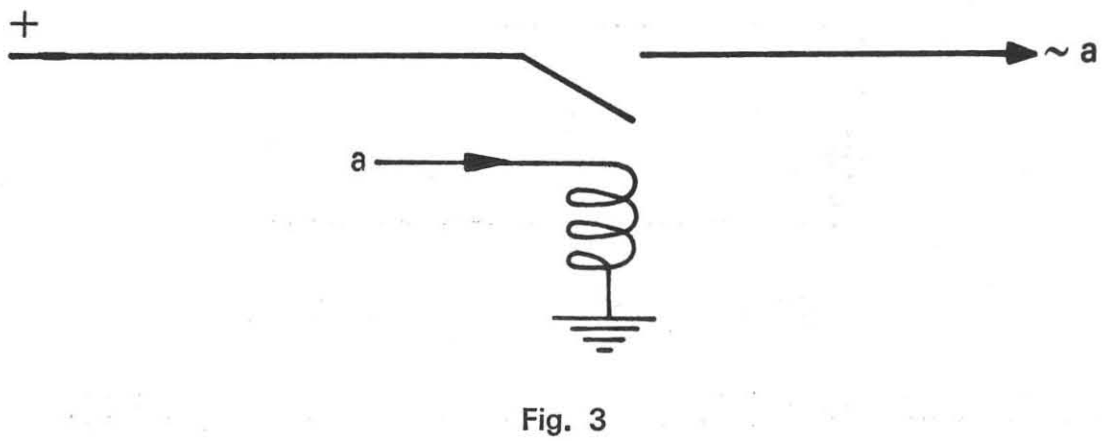
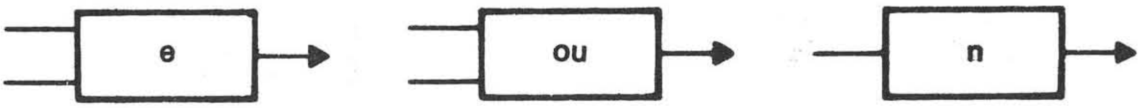


Fig. 3

Finalmente, no terceiro esquema o lançamento de corrente na bobina produz interrupção no circuito e existe uma mola que fecha automaticamente o interruptor quando não há corrente na bobina: trata-se pois da negação.

A partir destes três tipos de circuitos elementares, que podemos indicar respectivamente pelos símbolos:



é fácil construir vários circuitos que efectuem outras operações lógicas, mais ou menos complicadas, visto que todas, em última análise, se podem definir a partir daquelas três.

Por exemplo, a disjunção exclusiva, dada pela tabela junta, pode ser definida a partir da conjunção, da disjunção e da negação, por meio da fórmula:

$a \dot{\vee} b$

a \ b	V	F
V	F	V
F	V	F

$$a \dot{\vee} b = (a \wedge \sim b) \vee (b \wedge \sim a)$$

(isto é, *verifica-se* $a \dot{\vee} b$, *quando se verifica só* a *ou só* b).

De acordo com esta fórmula, apresentamos na fig. 4 o esquema de um circuito que efectua a *disjunção exclusiva.*

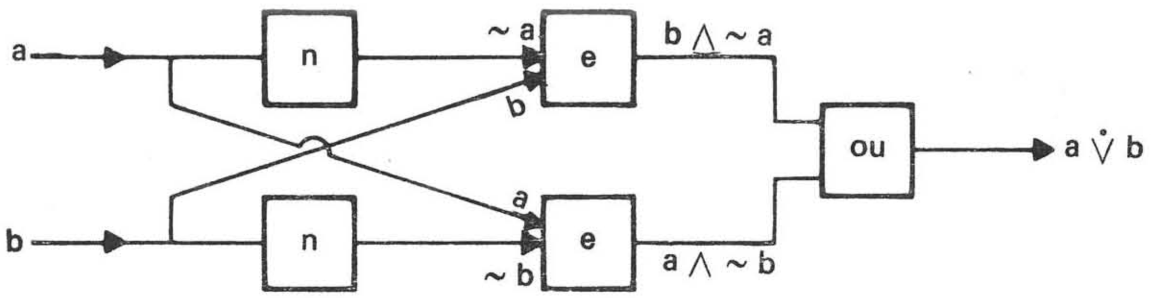


Fig. 4

Ainda se podem imaginar outros circuitos para efectuar esta operação, pois podemos defini-la de outros modos a partir das operações fundamentais, por exemplo segundo a fórmula:

$$a \dot{\vee} b = (a \vee b) \wedge \sim (a \wedge b)$$

(isto é, *verifica-se* a $\dot{\vee}$ b, *quando se verifica* a *ou* b *mas não* a *e* b *ao mesmo tempo*).

Um dos tipos de problemas de lógica matemática postos pelos cérebros electrónicos, que exigem cada vez mais o concurso de especialistas na matéria, é o seguinte:

Dada uma expressão de cálculo proposicional, reduzi-la a uma expressão mínima, isto é, a uma expressão equivalente que requeira o mínimo de circuitos elementares ('e', 'ou' e 'não') e portanto o mínimo de consumo energético do cérebro.

Consegue-se isto, aplicando as propriedades das operações lógicas, que vamos estudar, e cuja utilidade fundamental é: ECONOMIA DE TEMPO, ECONOMIA DE PENSAMENTO, ECONOMIA DE ESFORÇO.

A título de exemplo observe-se que, das duas fórmulas anteriores para definir a $\dot{\vee}$ b, a segunda é a mais económica, visto que poupa um circuito 'não'.