Portanto:

$$\boxed{Dx^{\alpha} = \alpha\, x^{\alpha - 1} \quad , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}}$$

46. **Derivadas das funções circulares.** As derivadas das funções circulares directas são deduzidas no *Compêndio de Trigonometria,* como se diz no *Guia*. Tem-se:

$$D \operatorname{sen} x = \cos x \quad , \quad D \cos x = -\operatorname{sen} x$$

Se, em vez de x, se tem $u = \varphi(x)$, com derivada finita, vem:

$$D \operatorname{sen} u = \cos u \cdot u' \quad , \quad D \cos u = -\operatorname{sen} u \cdot u'$$

$$D \operatorname{tg} u = \sec^2 u \cdot u'$$

Por exemplo:

$$D \operatorname{sen} 3x = 3 \cos 3x \quad , \quad D \operatorname{sen}^2 x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$$

$$D\, e^{\cos x} = -\, e^{\cos x} \operatorname{sen} x \quad , \quad D \operatorname{tg}(1 + \log x) = \frac{1}{x} \sec^2 (1 + \log x)$$

$$D \log(1 + \operatorname{sen}^3 x) = \frac{3 \operatorname{sen}^2 x \cos x}{1 + \operatorname{sen}^3 x} \quad , \text{ etc.}$$

Para achar as derivadas das funções circulares inversas (ver *Guia,* 2.º volume, I, n.º 14), basta aplicar o teorema das funções inversas.

Assim:

a) Pondo $y = \text{arc sen } x$ (com $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), vem:

$$x = \text{sen } y \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \cos y$$

e, portanto:

$$(1) \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y}$$

Ora

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y} = \sqrt{1 - x^2} \quad , \quad \forall y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

Logo, de (1) vem:

$$\boxed{D \text{ arc sen } x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

b) Analogamente se reconhece que

$$\boxed{D \text{ arc cos } x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$$

c) Pondo $y = \text{arc tg } x$ (com $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) , vem:

$$x = \text{tg } y \quad , \quad \frac{dx}{dy} = \sec^2 y$$

e, portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sec^2 y}$$

Ora

$$\sec^2 y = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$$

Logo:

$$\boxed{D \operatorname{arc} \operatorname{tg} x = \frac{1}{1 + x^2}}$$

Mais geralmente, sendo $u = \varphi(x)$, com derivada finita:

$$D_x \operatorname{arc} \operatorname{sen} u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} \quad , \quad D_x \operatorname{arc} \cos u = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$D_x \operatorname{arc} \operatorname{tg} u = \frac{u'}{1+u^2}$$

Imagine e resolva alguns exercícios em que se apliquem estas regras.

47. **Máximos e mínimos, concavidades e inflexões.** Sobre estes assuntos seguir o *Compêndio de Álgebra*, Cap. VIII. Como já foi observado atrás, convirá até começar a tratá-los imediatamente após terem sido dadas as primeiras regras da derivação (antes do conceito de diferencial), para que o aluno tome contacto, o mais cedo possível, com as aplicações concretas do estudo das derivadas.