

Neste caso, é fácil observar que o problema tem 9 soluções, entre as quais:

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}, \quad x_2 = a, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

DEFINIÇÃO. Qualquer solução x da equação $x^n = a$ (se existe pelo menos uma em A) é chamada raiz de índice n de a . Se existe uma única solução dessa equação em A , representá-la-emos por $\sqrt[n]{a}$. Neste caso a expressão $\sqrt[n]{a}$ chama-se radical (a , o radicando; n o índice da raiz) e a operação $(n, a) \rightarrow \sqrt[n]{a}$ é chamada radiciação.

Ter-se-á pois, por definição, neste último caso:

$$\sqrt[n]{a} = x \quad (x^n = a) \quad \text{e portanto} \quad (\sqrt[n]{a})^n = a$$

Verifica-se este caso se $A = \mathbb{R}^+$, quaisquer que sejam $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}$ (ver *Compêndio de Álgebra*, 6.º ano, Cap. I, n.º 25; para a hipótese $A = \mathbb{R}$, ver Cap. III, n.º 1) (1).

18. Potências de expoente fraccionário. Seja ainda A um semigrupo multiplicativo com elemento neutro, **1**. Da propriedade relativa ao produto de potências da mesma base reduz-se o seguinte

COROLÁRIO: $(a^m)^n = a^{mn}$, $\forall a \in A; m, n \in \mathbb{N}$.

Demonstração:

Tem-se:

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \cdot \dots \cdot a^m}^{(n \text{ vezes})} = \overbrace{a^{m+\dots+m}}^{(n \text{ vezes})} = a^{mn}$$

Esta propriedade generaliza-se facilmente ao caso em que m, n são elementos quaisquer de $\mathbb{Z}$.

Suponhamos agora verificada a seguinte

HIPÓTESE: Quaisquer que sejam $a \in A$ e $n \in \mathbb{N}$, a equação $x^n = a$ tem uma solução única em A .

(1) Ver nota da pág. 48.

Segundo a definição anterior essa solução é representada por $\sqrt[n]{a}$. A hipótese verifica-se, por exemplo, quando $A = \mathbb{R}^+$.

Posto isto, sejam m, n dois números naturais quaisquer e designemos por r o número racional m/n . Se m não é múltiplo de n , r é um número fraccionário. Que significado atribuir então ao símbolo a^r ? O significado deve ser tal que se mantenham as anteriores propriedades das potências. Assim, em particular, deverá ser $(a^r)^n = a^{rn}$ e, como $r = m/n$, virá sucessivamente $rn = m$,

$$(a^r)^n = a^m \quad \text{e portanto} \quad a^r = \sqrt[n]{a^m} \quad (\text{Porquê?})$$

Deveremos, pois, adoptar a seguinte

DEFINIÇÃO:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}, \quad \forall a \in A; m, n \in \mathbb{N}$$

É fácil ver, como se fez no 4.º ano (1), que o valor da potência de expoente m/n de a dado por esta definição é único, isto é, que:

$$\frac{m}{n} = \frac{m'}{n'} \Rightarrow a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m'}{n'}}$$

Em particular, se m/n é inteiro, o valor obtido é a potência usual. Mais ainda, pode verificar-se que todas as anteriores propriedades das potências se mantêm, com a referida definição.

Finalmente, se a é regular em A , define-se potência de expoente fraccionário negativo, como se fez para o expoente inteiro negativo:

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}, \quad \forall a \in A; m, n \in \mathbb{N}$$

E mais uma vez se verifica que as propriedades das potências se mantêm com a nova definição.

(1) Corresponde ao actual 2.º ano do ensino secundário (N. do E.).