

# Lei dos senos

**Referência :** Nuno Tavares, J., Geraldo, A. (2013), WikiCiências, 4(04):0772

**Autor:** João Nuno Tavares e Ângela Geraldo

**Editor:** José Francisco Rodrigues

## Lei dos senos

|                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>&lt;ggb_applet height="400" width="400" showResetIcon="true" filename="Lei_senos3.ggb" /&gt;</pre> | <p>Consideremos um triângulo <math>\triangle ABC</math>, como o representado no applet ao lado. As notações para os vértices e para as medidas de lados e de ângulos internos são as indicadas. Nestas condições, a <b>lei dos senos</b> diz que:</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$ <p>Podemos ainda ser mais específicos. Para isso, consideremos a circunferência circunscrita ao triângulo <math>\triangle ABC</math>, e seja <math>r</math> o seu raio. Então</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Demonstração

|                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>&lt;ggb_applet height="340" width="400" showResetIcon="true" filename="Lei_senos1.ggb" /&gt;</pre> | <p>Para provar a <b>lei dos senos</b>, usamos o facto conhecido (Proposição 20 do livro III dos <i>Elementos</i> de Euclides) de que a medida de um ângulo inscrito numa circunferência (isto é, um ângulo cujo vértice está sobre a circunferência e os lados contêm duas cordas da circunferência), é igual a metade da medida do ângulo ao centro (ou arco) que subtende a mesma corda ou metade da amplitude do arco <math>\widehat{AB}</math>.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>&lt;ggb_applet height="350" width="400" showResetIcon="true" filename="Lei_senos2.ggb" /&gt;</pre> | <p>Consideremos de novo a circunferência circunscrita ao triângulo <math>\triangle ABC</math>, e seja <math>r</math> o seu raio.</p> <p>Temos que: <math>\angle AOB = 2\angle ACB = 2\gamma</math>.</p> <p>Baixemos, a partir de <math>O</math>, a perpendicular que bissecta o lado <math>AB</math>. Temos então que</p> $\sin \gamma = \frac{c}{2r},$ <p>o que implica que <math>\frac{c}{\sin \gamma} = 2r = \text{constante}</math></p> <p>que é uma constante, constante esta que é independente de <math>c</math> e <math>\gamma</math>. Fazendo exactamente o mesmo procedimento para os dois outros lados e ângulos internos, obtemos</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2r$ <p>como se pretendia.</p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Aplicações

### Aplicação 1

|                                                                                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>&lt;ggb_applet height="300" width="280" showResetIcon="true" filename="Lei_senos_4.ggb" /&gt;</pre> | <p>Num triângulo inscrito numa circunferência de diâmetro igual a 1, o comprimento de cada lado é igual ao seno do ângulo oposto.</p> <p>Com efeito, neste caso, a lei dos senos diz que</p> $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 1$ <p>donde se deduz que</p> $(a = \sin \alpha, b = \sin \beta) \text{ e } (c = \sin \gamma).$ |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## Fórmulas de duplicação

|                                                                                                           |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>&lt;ggb_applet height="300" width="280" showResetIcon="true" filename="Lei_senos_5a.ggb" /&gt;</pre> | <p>Consideremos o triângulo <math>\triangle ROP</math> inscrito numa circunferência de raio igual a 1, que se ilustra no applet ao lado. Se <math>\angle AOP = 2\theta</math>, então <math>\angle ARP = \theta</math>.</p> <p>Aplicando a <b>lei dos senos</b> ao triângulo <math>\triangle ROP</math>, obtemos</p> $\frac{RP}{\sin(180^\circ - 2\theta)} = \frac{OP}{\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$ <p>uma vez que <math>OP = 1</math>, donde se deduz que</p> $\sin 2\theta = RP, \sin\theta,$ <p>uma vez que</p> $\sin(180^\circ - 2\theta) = \sin\theta.$ <p>Por outro lado, do triângulo <math>\triangle RSO</math>, retângulo em <math>S</math>, obtemos que</p> $\cos\theta = \frac{RS}{RO} = \frac{RP/2}{1} = \frac{RP}{2},$ <p>o que implica que</p> $RP = 2\cos\theta.$ <p>Substituindo <math>RP</math> na fórmula <math>\sin 2\theta = RP, \sin\theta</math>, acima deduzida, obtemos uma fórmula do seno do ângulo duplo:</p> $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$ |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fazendo um raciocínio análogo, aplicado agora ao triângulo  $\triangle RQP$ , retângulo em  $Q$ , obtemos as fórmulas do cosseno do ângulo duplo:

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

Criada em 07 de Dezembro de 2012

Revista em 12 de Março de 2013

Aceite pelo editor em 09 de Abril de 2013

# Fontes e Editores da Página

**Lei dos senos** *Fonte:* <http://wikiciencias.casadasciencias.org/wiki/index.php?oldid=22844> *Contribuidores:* Admin

## Licença

---

Creative Commons - Atribuição - Uso Não Comercial - Partilha nos Mesmos Termos  
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>

---