adequado de regras (axiomas), que nos permita raciocinar logicamente sobre tal conceito. (No final do capítulo trataremos do *conceito qualitativo* de probabilidade.)

12. **Axiomatização do conceito de probabilidade.** Das considerações precedentes podemos tirar, como súmula, a seguinte norma prática:

Dizer que a *probabilidade de um acontecimento* α, relativo a uma prova $\mathcal{D}$, é um determinado número p, significa que, dado um número positivo ε, tão pequeno quanto se queira, existe sempre um número n bastante grande tal que, numa sequência de n ou mais realizações de $\mathcal{D}$, é *praticamente certo* que a frequência relativa de α estará compreendida entre $p-\varepsilon$ e $p+\varepsilon$.

Não se trata aqui propriamente duma definição. É preciso notar que, no conceito de 'certeza prática' já está implícito o de 'probabilidade': um acontecimento diz-se *praticamente certo,* quando a sua probabilidade é *aproximadamente* 1, com erro desprezível ([1]). No entanto, a regra anterior elucida bastante sobre o uso prático do termo 'probabilidade'. Uma vez que as probabilidades são *frequências relativas previstas,* é natural atribuir-lhes as mesmas propriedades formais que se aplicam a frequências relativas (ver n.º 9). Somos, assim, levados a admitir, como *axiomas,* as seguintes propriedades, sendo α e β dois acontecimentos relativos a uma prova $\mathcal{D}$:

AXIOMA 1. *A probabilidade de* α — *que se designa abreviadamente por* $P(\alpha)$ — *é sempre um número real não negativo, isto é:* $P(\alpha) \geqslant 0$.

([1]) Analogamente, um acontecimento diz-se *praticamente impossível,* quando a sua probabilidade é aproximadamente 0, com erro desprezível. Por exemplo, é praticamente impossível que um macaco escreva à máquina a *Eneida* (exemplo do *macaco dactilógrafo,* de Emílio Borel).

AXIOMA 2. *A probabilidade do acontecimento certo é* 1, *isto é:* $P(\alpha) = 1$ *se* $\alpha = \mathbb{1}$.

AXIOMA 3. *Se* α *e* β *são acontecimentos incompatíveis, tem-se:*

$$P(\alpha + \beta) = P(\alpha) + P(\beta)$$

Destes axiomas (como premissas) deduzem-se, logicamente, vários *teoremas* (como conclusões), entre os quais os seguintes:

TEOREMA 1. *A probabilidade do acontecimento contrário de* α *é* $1 - P(\alpha)$, *isto é:*

$$P(\tilde{\alpha}) = 1 - P(\alpha)$$

Com efeito, como $\alpha\,\tilde{\alpha} = \mathbb{0}$ (*porquê?*) tem-se:

$$P(\alpha + \tilde{\alpha}) = P(\alpha) + (P\tilde{\alpha}) \qquad (\textit{Porquê?})$$

Por outro lado, como $\alpha + \tilde{\alpha} = \mathbb{1}$ (*porquê?*) tem-se:

$$P(\alpha) + P(\tilde{\alpha}) = 1 \quad (\textit{porquê?})$$

e, portanto, $P(\tilde{\alpha}) = 1 - P(\alpha)$.

COROLÁRIO 1. *Se* α *é acontecimento impossível, tem-se*:

$$P(\alpha) = 0 \quad (\textit{demonstre})$$

COROLÁRIO 2. *Qualquer que seja* α, *tem-se*:

$$P(\alpha) \leqslant 1 \quad (\textit{demonstre})$$

Portanto: $P(\alpha)$ é sempre um número real do intervalo $[0.1]$.

TEOREMA 2. *Se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são n acontecimentos incompatíveis dois a dois (relativos à mesma prova $\mathcal{P}$) a probabilidade de que se realize um, pelo menos, dos acontecimentos $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ é a soma das probabilidades destes acontecimentos, isto é:*

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(\alpha_i), \textit{ se } \alpha_i \alpha_k = (0 \textit{ para } i \neq k$$

Para demonstrar este teorema, basta aplicar, repetidamente, o axioma 2, observando que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3,$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_4, \text{ etc.}$$

e que, se $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ são incompatíveis dois a dois, também α_3 é incompatível com $\alpha_1 + \alpha_2$ (*prove*), α_4 com $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, etc.

TEOREMA 3. *Quaisquer que sejam os acontecimentos α, β relativos à prova $\mathcal{P}$, tem-se:*

$$P(\alpha + \beta) = P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha\beta)$$

Com efeito, tem-se (*prove*):

(1) $$\alpha = \alpha\tilde{\beta} + \alpha\beta \quad , \quad \beta = \tilde{\alpha}\beta + \alpha\beta$$

(2) $$\alpha + \beta = \alpha\tilde{\beta} + \tilde{\alpha}\beta + \alpha\beta$$

De (1) vem:

(3) $$P(\alpha) = P(\alpha\tilde{\beta}) + P(\alpha\beta) \quad , \quad P(\beta) = P(\tilde{\alpha}\beta) + P(\alpha\beta) \qquad (\textit{Porquê?})$$

Por sua vez de (2) vem:

$$P(\alpha + \beta) = P(\alpha\tilde{\beta}) + P(\tilde{\alpha}\beta) + P(\alpha\beta) \qquad (\textit{Porquê?})$$

Donde, atendendo a (3):

$$P(\alpha+\beta) = P(\alpha) + P(\beta) - P(\alpha\,\beta)$$

Este teorema pode generalizar-se ao caso de *n* acontecimentos, obtendo-se a FÓRMULA DE DANIEL DA SILVA em termos de probabilidade.

13. **Exemplos de aplicação.** Vamos ver como as regras anteriores (axiomas e teoremas) podem ser aplicadas na prática. Os exemplos que vão seguir-se referem-se quase todos a *jogos de sorte,* também chamados *jogos de azar* (atribuindo aqui à palavra 'azar' o significado de 'acaso'). Na verdade, foram as reflexões de alguns matemáticos sobre jogos de azar que deram origem ao cálculo das probabilidades. Mais adiante trataremos de exemplos mais importantes.

EXEMPLO 1. Consideremos o caso do lançamento de um dado *ao acaso* e sejam $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ os acontecimentos *'sair o n.º* 1' *'sair o n.º* 2', ..., *'sair o número* 6'. Se o dado é *imperfeito,* isto é, se não se aproxima bastante de um cubo ou se é sensivelmente não homogéneo (por exemplo, mais denso nuns pontos que noutros), as probabilidades

$$P(\alpha_1),\ P(\alpha_2),\ \ldots,\ P(\alpha_6)$$

não são sensivelmente iguais, mas poderão ser determinadas *empiricamente* com maior ou menor aproximação. (*Como?*)

Seja porém como for, o acontecimento *'sair número primo menor que* 5' é, neste caso, $\alpha_2 + \alpha_3$ e, portanto, a sua probabilidade será:

$$P(\alpha_2+\alpha_3) = P(\alpha_2) + P(\alpha_3) \qquad (\textit{Porquê?})$$